

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
**КАМЫШИНСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)**  
ВОЛГОГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Н. Г. Неумоина  
А. В. Белов

# **ТЕПЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ РЕЗАНИЯ**

*Учебное пособие*

РПК «Политехник»  
Волгоград  
2006

УДК 621.91(075.8)  
Н 57

Рецензенты: д. т. н., проф. Е. П. Богданов  
технический совет ООО «КЗСМИ»

Неумоина Н. Г., Белов А. В. Тепловые процессы в технологической системе резания: Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. – 84 с.

ISBN 5-230-04834-4

Содержит сведения о методах расчета тепловых эффектов, сопровождающих процесс механической обработки материалов. Изложена инженерная методика расчета температур на контактных площадках твердых тел при резании материалов, даны основы расчета конвективного теплообмена. Приведен пример расчета. Представлены задания для самостоятельной работы студентов.

Предназначено для студентов специальности «Технология машиностроения» (заочная форма обучения). Может быть использовано также студентами, обучающимися по направлению «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств» очной формы обучения.

Ил. 33. Табл. 12. Библиогр.: 8 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Волгоградского государственного технического университета

ISBN 5-230-04834-4

© Волгоградский  
государственный  
технический  
университет, 2006

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| 1. Цели и задачи учебной дисциплины.....   | 5  |
| 1.1. Цель преподавания дисциплины.....   | 5  |
| 1.2. Задачи изучения дисциплины.....   | 5  |
| 2. Содержание учебной дисциплины.....  | 6  |
| 3. Теоретическая часть.....  | 6  |
| 3.1. Постановка задачи описания тепловых процессов при механической обработке материалов.....                            | 6  |
| 3.1.1. Физическая модель. Балансовые соотношения.....  | 6  |
| 3.1.2. Основные понятия и определения при описании процесса переноса тепла.....  | 8  |
| 3.1.3. Основной закон теплопроводности.....  | 11 |
| 3.1.4. Дифференциальное уравнение теплопроводности.....  | 12 |
| 3.2. Классификация источников и стоков теплоты.....  | 15 |
| 3.2.1. Расположение и форма источников.....  | 15 |
| 3.2.2. Закон распределения интенсивности источника.....  | 16 |
| 3.2.3. Скорость перемещения и длительность функционирования источника.....   | 20 |
| 3.3. Общие принципы схематизации тел и источников, участвующих в теплообмене, при механической обработке материалов..... | 20 |
| 3.3.1. Дифференциальное уравнение теплопроводности и условия однозначности.....  | 20 |
| 3.3.2. Схематизация теплофизических свойств обрабатываемых материалов.....   | 22 |
| 3.3.3. Схематизация формы тела.....  | 22 |
| 3.3.4. Начальные и граничные условия.....  | 24 |
| 3.3.5. Кодирование тепловых источников.....  | 25 |
| 3.4. Аналитические методы решения теплофизических задач.....   | 26 |
| 3.4.1. Общая характеристика методов решения дифференциального уравнения теплопроводности.....                            | 26 |
| 3.4.2. Метод источников теплоты. Основные положения.....   | 27 |
| 3.4.3. Непрерывно действующие источники.....   | 31 |
| 3.4.4. Интегральный переход третьего типа.....   | 32 |
| 3.4.5. Быстродвижущиеся источники.....   | 35 |
| 3.5. Конвективный теплообмен.....  | 37 |
| 3.5.1. Роль конвективного теплообмена в процессе резания металлов.....   | 37 |
| 3.5.2. Основные положения теории пограничного слоя.....  | 37 |
| 3.5.3. Факторы, влияющие на величину коэффициента теплоотдачи.....   | 40 |
| 3.5.4. Основные положения теории подобия.....  | 41 |
| 3.5.5. Общий вид критериальных уравнений и методика решения задач.....   | 44 |
| 3.5.6. Типичные случаи конвективного теплообмена.....  | 44 |

|  |    |
|--|----|
| 3.5.7. Теплоотдача при естественной конвекции.....   | 45 |
| 3.5.8. Теплоотдача при вынужденной конвекции.....  | 47 |
| 3.5.9. Примеры решения задач.....  | 48 |
| 3.6. Обобщенный алгоритм и методика теплофизического анализа<br>технологических систем при механической обработке..... | 50 |
| 3.6.1. Обобщенный алгоритм теплофизического анализа.....   | 50 |
| 3.6.2. Итоговые потоки теплообмена.....  | 51 |
| 3.6.3. Структурная схема теплообмена в системе тел.....  | 53 |
| 3.6.4. Плотность итоговых потоков теплообмена.....   | 54 |
| 3.7. Инженерная методика расчета температур на контактных<br>площадках твердых тел.....                                | 55 |
| 3.7.1. Методика расчета температур. Общие положения.....   | 55 |
| 3.7.2. Методика расчета температур на контактных площадках<br>стержней.....  | 59 |
| 3.7.3. Взаимное влияние источников.....  | 62 |
| 3.7.4. Источники и стоки теплоты в технологической системе<br>резания.....   | 63 |
| 3.7.5. Структурная схема теплообмена в зоне резания при точении....  | 66 |
| 4. Алгоритм и пример расчета температуры резания при точении.....  | 72 |
| 4.1. Алгоритм расчета температуры резания при точении.....   | 72 |
| 4.2. Пример расчета.....   | 73 |
| 4.3. Задания на самостоятельную работу.....  | 81 |
| 5. Контрольные вопросы.....  | 82 |
| 6. Используемая литература.....  | 83 |

# 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

## 1.1. Цель преподавания дисциплины

Целью курса «Тепловые процессы» является формирование у студентов глубоких знаний в области технологической теплофизики, что позволит им успешно освоить соответствующие разделы специальных дисциплин и творчески относиться к решению производственных задач, связанных с тепловыми процессами и явлениями в технологических системах, использованием тепловой энергии для интенсификации производства и экономией топливно-энергетических ресурсов.

Дисциплина изучается студентами машиностроительного профиля как очной, так и заочной форм обучения, является элективной и включает в себя выполнение семестрового задания (контрольной работы) по определению температур на контактных площадках твердых тел при тчении.

## 1.2. Задачи изучения дисциплины

Задачи изучения дисциплины заключаются в изучении студентами основ теории теплообмена, на базе которых они должны научиться проводить тепловые расчеты по определению тепловых потоков и температурных полей в различных системах, в том числе в узлах станков, режущих инструментах и обрабатываемых деталях, уметь анализировать рабочие процессы и знать методы повышения эффективности механической обработки материалов за счет использования закономерностей тепловых явлений.

Для этого студент должен знать:

- основные особенности физических процессов, происходящих в зоне механической обработки и место тепловых явлений среди них;
- основные положения теории теплообмена и их практическую значимость для инженера-машиностроителя;
- методы решения инженерных теплофизических задач при различных способах передачи теплоты;

В результате изучения курса студент должен уметь:

- решать инженерные теплофизические задачи с применением современных вычислительных методов;
- анализировать эффективность использования тепловой энергии в технологических процессах и определять основные пути их совершенствования;
- самостоятельно работать с технической литературой для решения этих задач.

## 2. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Постановка задачи описания тепловых процессов при механической обработке материалов. Физическая модель. Балансовые соотношения. Основные способы переноса тепла. Температурное поле. Тепловой поток. Температурный градиент. Основной закон теплопроводности (закон Фурье). Дифференциальное уравнение теплопроводности.

2. Общие принципы схематизации тел и источников, участвующих в теплообмене при механической обработке материалов. Расположение и форма источников. Закон распределения интенсивности. Скорость перемещения источника. Время функционирования источника. Схематизация теплофизических свойств обрабатываемых и инструментальных материалов. Схематизация геометрической формы тел. Граничные и начальные условия. Кодирование тепловых источников.

3. Метод источников теплоты. Основные положения. Непрерывно действующие источники. Движущиеся и быстро движущиеся источники. Термический цикл и скорость изменения температуры.

4. Конвективный теплообмен. Типичные случаи конвективного теплообмена. Основные положения теории пограничного слоя и теории подобия. Общий вид критериальных уравнений и методика решения задач. Теплоотдача при естественной конвекции. Теплоотдача при вынужденной конвекции.

5. Теплофизический анализ технологических систем при механической обработке. Обобщенный алгоритм и методика анализа. Итоговые потоки теплообмена. Структурная схема теплообмена.

## 3. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### 3.1. Постановка задачи описания тепловых процессов при механической обработке материалов

#### 3.1.1. Физическая модель. Балансовые соотношения

Задача совершенствования технологических процессов в машиностроении вызывает необходимость изучения тепловых явлений, которые возникают при механической обработке деталей. Повышение прочности и вязкости конструкционных материалов, а также интенсификация режимов обработки приводят к тому, что температура процесса становится одним из факторов, которые ограничивают производительность процесса и оказывают существенное влияние на качество и точность изделия [4].

Суть процессов, происходящих в зоне механической обработки детали очень сложна.

- Во-первых, потому, что происходит превращение одних видов энергии в другие (механической в потенциальную энергию кристаллической решетки и тепловую вследствие наличия трения).

- Во-вторых, потому что слишком большое количество факторов оказывает влияние на результирующую картину (теплофизические свойства материала заготовки и инструмента, параметры механической обработки (скорость, подача, глубина и др.), состояние материала в поверхностном слое заготовки, наличие или отсутствие влияния технологических сред или других источников воздействия на зону механической обработки).

Между механической мощностью процесса  $N$  [Н·(м/с)] и ее тепловым эквивалентом  $Q$  (Дж/с) теоретически нет полной количественной идентичности, т. к. часть механической энергии переходит в поглощенную энергию деформации кристаллической решетки обрабатываемого материала. Однако, ряд исследований показал, что при больших степенях деформации, характерных для процессов механической обработки, поглощенная энергия незначительна ( $\sim 0,5 \div 3 \%$ ), и с достаточной для практики точностью можно полагать, что вся механическая мощность переходит в теплоту.

Рассмотрим схему возникновения и распространения тепловых потоков при обработке заготовки лезвийным инструментом [4] (рис. 1.1). В качестве основных источников тепла в зоне резания можно выделить деформирование материала, трение стружки о переднюю поверхность инструмента и заготовки о заднюю его поверхность. Распределяется образующееся тепло в три основных элемента системы резания: заготовку, стружку, инструмент, а также в окружающую среду. Таким образом, для зоны резания может быть составлено уравнение теплового баланса в виде (1.1).

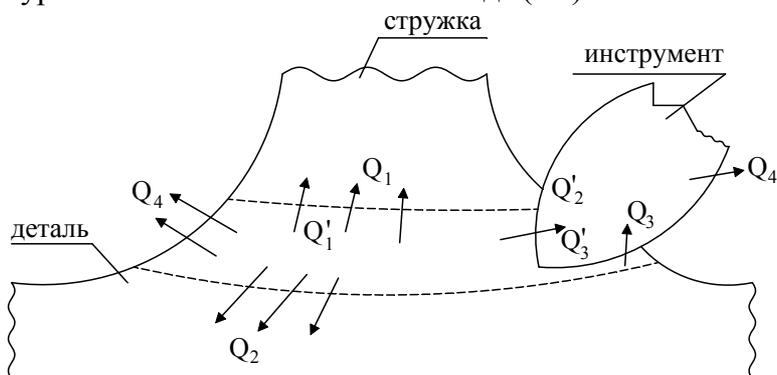


Рис. 1.1. Схема возникновения и распределения тепловых потоков в технологической системе резания

$$Q'_1 + Q'_2 + Q'_3 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4, \quad (1.1)$$

где  $Q'_i$  – количество теплоты, эквивалентное энергии, затраченной на дефор-

мирование и разрушение при стружкообразовании поверхностного слоя;

$Q'_2$  – количество теплоты, эквивалентное работе сил трения при контакте передней поверхности лезвия и деформированного материала;

$Q'_3$  – количество теплоты, эквивалентное работе сил трения на задней поверхности лезвия при переходе деформированного материала в поверхностный слой изделия;

$Q_1$  – количество теплоты, уходящее в стружку;

$Q_2$  – количество теплоты, уходящее в деталь;

$Q_3$  – количество теплоты, уходящее в инструмент;

$Q_4$  – количество теплоты, уходящее в окружающую среду.

На распределение тепла между стружкой, деталью и инструментом главное влияние оказывают механические и теплофизические свойства материала детали и скорость резания. В 1915 г. Я. Г. Усачов [1] установил, что наибольшее количество тепла переходит в стружку (для стали 60-80 % от общего количества тепла). С увеличением скорости резания доля тепла, уходящего в стружку, увеличивается, а ее средняя температура растет. Сказанное выше иллюстрируется в табл. 1 и 2. Из табл. 1, например, видно, что распределение тепла между стружкой, деталью и резцом сильно зависит от коэффициента теплопроводности  $\lambda$  обрабатываемого материала. Из табл. 2 следует, что увеличение скорости резания приводит к возрастанию доли тепла, отводимого в стружку.

Таблица 1

Общее количество выделяемого тепла, средняя температура стружки и распределение тепла между стружкой, деталью и инструментом при точении ( $t = 1,5$  мин;  $S = 0,12$  мм/об;  $V = 100$  м/мин)

| материал обрабатываемой детали | $\lambda$ , Вт/(м·К) | общее количество теп-ла, кДж/мин | средняя температура стружки, °С | количество тепла (%) |          |         |
|--------------------------------|----------------------|----------------------------------|---------------------------------|----------------------|----------|---------|
|                                |                      |                                  |                                 | в стружке            | в детали | в резце |
| Сталь 40Х                      | 33,9                 | 52                               | 420                             | 71                   | 26       | 1.9     |
| Чугун                          | 39,8                 | 52                               | 290                             | 42                   | 50       | 1.5     |
| Алюминий                       | 209                  | 36                               | 140                             | 21                   | 73       | 2.2     |

Таблица 2

Удельное количество тепла, уходящего в стружку в зависимости от скорости резания  $V$  ( $t = 1,5$  мм;  $S = 0,126$  мм/об при точении стали 40Х)

| $V$ , м/мин              | 10,2 | 204 | 50,1 | 240 | 390 |
|--------------------------|------|-----|------|-----|-----|
| $q$ , кДж/мин (удельное) | 0,8  | 1,1 | 1,3  | 2,4 | 2,7 |

### 3.1.2. Основные понятия и определения при описании процесса переноса тепла

Передача и распространение теплоты – сложное явление, реализация которого в каждом конкретном случае связана с тремя различными по фи-

зической природе элементарными способами переноса тепла: теплопроводностью, конвективным теплообменом и тепловым излучением [2].

Распространение теплоты *теплопроводностью* зависит от физических свойств тела: в газах передача тепла теплопроводностью осуществляется в результате соударения молекул между собой; в металлах – диффузией свободных электронов и упругих колебаний кристаллической решетки; в жидкостях и твердых диэлектриках – путем упругих волн (упругие колебания кристаллической решетки).

*Конвективный теплообмен* – процесс переноса тепла при перемещении макроскопических объемов газа или жидкости из области с одной температурой в область с другой температурой. Конвекция всегда сопровождается теплопроводностью.

Различают естественную и вынужденную конвекцию. В первом случае движущей силой процесса является разность температур. Во втором – принудительное внешнее воздействие, чаще всего механическое (насосы, компрессоры, вентиляторы).

В инженерной практике основной интерес представляет *теплоотдача*, под которой понимают конвективный теплообмен между потоком жидкости или газа и поверхностью твердого тела. Этот процесс чаще всего описывают уравнением Ньютона-Рихмана:

$$Q = \alpha \cdot F \cdot (t_{жс} - t_c), \quad (1.2)$$

где  $F$  – поверхность теплоотдачи,  $m^2$ ;

$t_{жс}$ ,  $t_c$  – температуры жидкости и стенки, К или  $^{\circ}C$ ;

$\alpha$  – коэффициент теплоотдачи,  $Вт/(m^2 \cdot K)$ . Его можно выразить из уравнения (1.2) и дать следующее определение.

$$\alpha = \frac{Q}{F \cdot (t_{жс} - t_c)}.$$

*Коэффициент теплоотдачи*  $\alpha$  представляет собой количество тепла, отдаваемое или воспринимаемое единицей поверхности теплоотдачи  $F$  при разности температур между жидкостью и стенкой  $IK$ . Коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  зависит от большого числа факторов: формы и размеров тела, режима движения, скорости и температуры жидкости, ее теплофизических свойств и т. п. Расчет теплоотдачи, несмотря на простоту уравнения (1.2), является весьма сложным делом, главная трудность которого заключается в определении величины коэффициента теплоотдачи (более подробно – см. раздел 3.5).

*Тепловое излучение* – это процесс распространения тепловой энергии с помощью электромагнитных волн. При тепловом излучении происходит двойное превращение энергии: тепловая энергия излучающего тела переходит в лучистую и, наоборот, лучистая энергия, поглощаясь телом, переходит в тепловую.

При данной температуре наибольший тепловой поток излучает абсолютно черное тело. Величина его плотности определяется законом Стефана-Больцмана:

$$q = \sigma_0 \cdot T^4, \quad (1.3)$$

где  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^8 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К}^4)$  – константа излучения абсолютно черного тела.

Плотность теплового потока, излучаемого нечерными телами, оценивается формулой:

$$q = \varepsilon \cdot \sigma_0 \cdot T^4, \quad (1.4)$$

где  $\varepsilon$  – степень черноты. Ее величина  $0 < \varepsilon < 1$  и определяется экспериментально или из справочника.

При лучистом теплообмене между двумя телами они одновременно облучают друг друга. Результирующая теплота, переданная излучением от тела с более высокой температурой к телу с более низкой, определяется выражением:

$$Q_{12} = \sigma_{np} \cdot F \cdot (T_1^4 - T_2^4), \quad (1.5)$$

где  $F$  – взаимная поверхность облучения;

$\sigma_{np}$  – приведенная константа излучения.

*Тепловой поток* – количество теплоты, которое передается в единицу времени от источника теплоты к какому-либо телу (стоку). Тепловой поток ( $Q$ ) измеряется в Вт, кВт и т.п.

*Плотность (интенсивность) теплового потока* – тепловой поток, отнесенный к единице поверхности, объема или длины теплового источника. Плотность теплового потока обозначается  $q$ :

$$q = \frac{Q}{F \cdot (V, L)}, \quad (1.6)$$

где  $F$  – площадь передачи теплоты, перпендикулярная направлению теплового потока,  $\text{м}^2$ ;  $V$  – объем,  $\text{м}^3$ ;  $L$  – длина, м.

*Источником* называется объект, генерирующий теплоту.

Мощность источника оценивается величиной генерируемого теплового потока или его плотностью.

*Стоком* называется объект, поглощающий теплоту.

*Температурное поле* – совокупность значений температуры тела в любой момент времени. Его наиболее общее математическое выражение:

$$t = t \cdot (x, y, z, \tau), \quad (1.7)$$

где  $x, y, z$  – координаты отдельной точки тела;  $\tau$  – время.

Температурное поле, описываемое выражением (1.7) называется трехмерным нестационарным, т. е. изменяющимся с течением времени. Такое поле соответствует режиму прогрева или охлаждения тел. Если температура каждой точки с течением времени не меняется, то поле называется трехмерным стационарным и выражается уравнением:

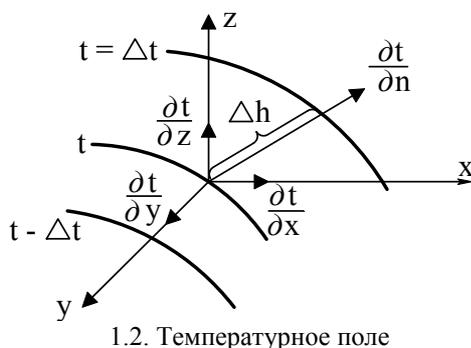
$$t = t \cdot (x, y, z).$$

*Изотермические поверхности* – геометрическое место точек, имеющих одинаковую температуру. Изотермические поверхности не могут пересекаться друг с другом. Они или замыкаются сами на себя, или обрываются на границах тела.

*Изотермические линии (изотермы)* – линии, образованные пересечением изотермических поверхностей с секущей плоскостью. Как и изотермические поверхности, изотермические линии не могут пересекаться друг с другом – они или замыкаются сами на себя, или обрываются на границах тела.

*Температурный градиент* – предел отношения изменения температуры между двумя изотермами к расстоянию между последними, измеренному по нормали.

$$\text{grad } t = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta n} = \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (1.8)$$



Температурный градиент – векторная величина. Его положительное направление совпадает с направлением роста температуры. В соответствии со вторым законом термодинамики, вектор теплового потока направлен в противоположную сторону: от большей температуры к меньшей.

Единица измерения в системе СИ (К/м).

### 3.1.3. Основной закон теплопроводности

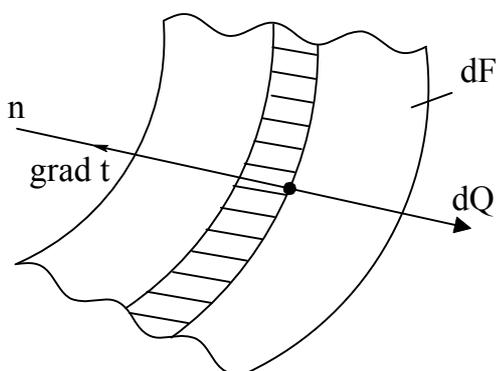


Рис. 1.3. Элементарная изотермическая поверхность

Рассмотрим элемент изотермической поверхности  $dF$ . По нормали  $n$  покажем вектор  $\text{grad } t$ . Он, как уже отмечалось, направлен в сторону повышения температуры. Следовательно, поток теплоты, который представим в виде вектора  $dQ$ , направлен в противоположную сторону.

В 1882 году Ж-Б- Фурье высказал гипотезу о том, что количество теплоты  $dQ$ , проходящее через элемент поверхности  $dF$  за время  $dt$

пропорционально  $\text{grad } t$ , т. е.:

$$dQ = -\lambda \cdot grad t \cdot dF \cdot d\tau, \quad (1.9)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К).

Отношение:

$$q = \frac{dQ}{dF \cdot d\tau}, \quad (1.10)$$

представляющее собой количество теплоты, проходящее в единицу времени, через единицу площади изотермической поверхности есть не что иное, как плотность теплового потока. Подставляя (1.9) в (1.10) получим:

$$q = -\lambda \cdot grad t = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (1.11)$$

где  $q$  – вектор плотности (интенсивности) теплового потока.

Формула (1.11) представляет основной закон теплопроводности (закон Фурье), который утверждает, что плотность теплового потока пропорциональна градиенту температуры.

Коэффициент теплопроводности  $\lambda$  характеризует физические свойства материала. Его размерность устанавливается из выражения:

$$\lambda = \frac{dQ}{dF \cdot d\tau \cdot \left(-\frac{\partial t}{\partial n}\right)}. \quad (1.12)$$

Таким образом, *коэффициент теплопроводности* – это теплота, передаваемая теплопроводностью в единицу времени через единицу поверхности при перепаде температуры на единицу длины нормали, равном одному градусу, размерность его - Вт/(м·К).

### 3.1.4. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Математическое описание температурных полей в компонентах технологических систем выполняется с помощью дифференциального уравнения теплопроводности. Выведем это уравнение при следующих допущениях [3]: твердое тело однородно и изотропно; в процессе теплопередачи не происходят фазовые превращения; деформация, вызванная изменением температуры пренебрежимо мала по сравнению с размерами тела. Выделим из нагреваемого тела элементарный объем (рис. 1.4)  $\Delta V$ , где  $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ . На основании закона изменения внутренней энергии

$$dU = dQ_1 + dQ_2, \quad (1.13)$$

где  $dU$  – общее изменение внутренней энергии вещества в объеме  $\Delta V$  за время  $\Delta\tau$ ;

$dQ_1$  – количество теплоты, поступившее в этот объем путем теплопроводности;

$dQ_2$  – количество теплоты, возникшее в объеме  $\Delta V$  в связи с функционированием в нем внутренних источников. К внутренним относятся

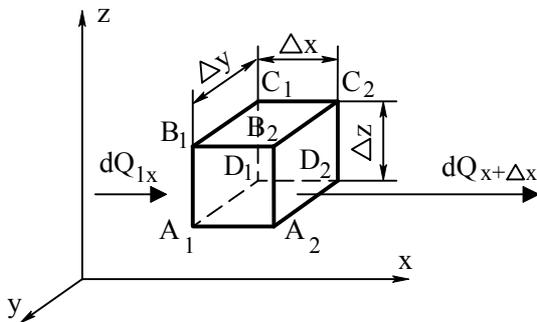


Рис. 1.4. Перенос тепла в элементарном объеме

источники, тепловыделение которых связано с процессами, происходящими в материале твердого тела, например, с объемными химическими реакциями, действием электрического тока и т. д. Пусть за время  $d\tau$  к элементарной площадке  $A_1B_1C_1D_1$  подведено  $dQ_x = q_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot d\tau$  теплоты, где  $q_x$  – плотность теплового потока в направлении оси ОХ. Через противоположную площадку  $A_2B_2C_2D_2$  за это же время отводится  $dQ_{x+\Delta x}$  теплоты, причем  $dQ_{x+\Delta x} = q_{x+\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot d\tau$ .

Разность:

$$dQ_{Ix} = dQ_x - dQ_{x+\Delta x} = (q_x - q_{x+\Delta x}) \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot d\tau, \quad (1.14)$$

представляет собой количество теплоты, поступившей в объем  $\Delta V$  за счет теплопередачи в направлении оси ОХ. Функция  $q_{x+\Delta x}$  непрерывна в интервале  $\Delta x$ , поэтому она может быть разложена в ряд Тейлора:

$$q_{x+\Delta x} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \quad (1.15)$$

Ограничимся первыми двумя членами ряда, поскольку остальные содержат малые величины высоких порядков. Тогда уравнение (1.14) преобразуется:

$$dQ_{Ix} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot d\tau = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot \Delta V \cdot d\tau. \quad (1.16)$$

Аналогичные выражения можно получить для определения количества теплоты, поступившей в объем  $\Delta V$  по направлениям ОУ и ОZ. Суммируя величины  $dQ_{Ix}$ ,  $dQ_{Iy}$ ,  $dQ_{Iz}$ , получаем:

$$dQ_I = -\left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \cdot \Delta V \cdot d\tau. \quad (1.17)$$

Определим величину  $dQ_2$ . Если объемную плотность тепловыделения внутренних источников обозначить  $q_v$ , то за время  $d\tau$  в объеме  $\Delta V$  накопится теплота:

$$dQ_2 = q_v \cdot \Delta V \cdot d\tau. \quad (1.18)$$

Элементарные количества теплоты  $dQ_I$  и  $dQ_2$  вызовут изменение температуры вещества и величину  $dU$  можно найти из уравнения:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{I}{c \rho \Delta V} \cdot \frac{dU}{d\tau}, \quad (1.19)$$

где  $c$  – массовая теплоемкость, Дж/(кг·К),  $\rho$  – плотность вещества, кг/м<sup>3</sup>.

Подставляя значения  $dQ_1$ ,  $dQ_2$ ,  $dU$  из уравнений (1.17) – (1.19) в уравнение (1.13), получим:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{I}{c \cdot \rho} \cdot \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \frac{q_6}{c \cdot \rho}. \quad (1.20)$$

$$\text{Но по закону Фурье: } q_x = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial z}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{I}{c \cdot \rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_6}{c \cdot \rho}. \quad (1.21)$$

Так как коэффициент теплопроводности зависит от температуры, то дифференциальное уравнение теплопроводности в общем виде имеет выражение (1.21). Более простой вид уравнения получается после принятия упрощающих допущений. Наиболее часто применяют следующие допущения: 1) коэффициент теплопроводности не зависит от температуры; 2) плотность внутренних источников тепла равна 0, ( $q_6 = 0$ ):

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right), \quad (1.22)$$

где  $\frac{\lambda}{c \cdot \rho} = a$  – коэффициент температуропроводности данного вещества. Он характеризует тепловую инерцию материала. Чем выше  $a$ , тем быстрее материал прогревается.

Таким образом, в наиболее простом виде дифференциальное уравнение теплопроводности выглядит так:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t, \quad (1.23)$$

где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Выражения (1.23) и (1.22) представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка.

Аналитическое решение нелинейных дифференциальных уравнений достаточно сложно и они могут быть решены только в простейших случаях теплообмена. Намного легче решаются линейные дифференциальные уравнения т. к. они обладают важной особенностью известной из математики: сумма нескольких независимых друг от друга решений линейного дифференциального уравнения также является решением такого уравнения. Это

свойство позволяет в случаях, когда на тело действует система из нескольких независимых источников описать их воздействие независимыми дифференциальными уравнениями, решить их, а затем общее решение представить в виде суммы частных (принцип суперпозиции решений).

## 3.2. Классификация источников и стоков теплоты

### 3.2.1. Расположение и форма источников

По расположению источники теплоты можно разделить на внешние, действующие на поверхности тел, и внутренние, функционирующие в их массе [3]. Источники, возникающие в зоне обработки, в принципе, являются внутренними, так как и энергия деформации, и энергия трения выделяются в некоторых объемах. Однако в своем большинстве толщина слоев настолько мала, что такие источники можно полагать внешними, действующими на поверхностях тел, участвующих в процессе обработки.

В реальных технологических условиях источники и стоки теплоты возникают в объемах и областях, форму и размеры которых не всегда можно точно обрисовать. При теплофизическом анализе реальные источники заменяют идеализированными, форма которых в той или иной степени приближена к фактической. Такие идеализированные источники могут быть трехмерными, двухмерными, одномерными и точечными.

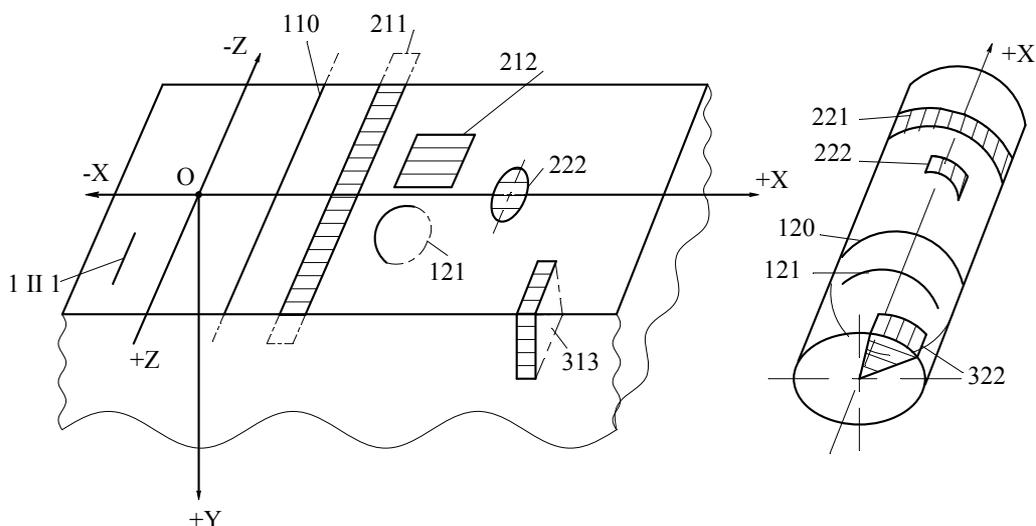


Рис. 2.1. Идеализированные источники теплоты (кодовые обозначения – по табл. 3)

В трехмерных (объемных) источниках теплота распределена по некоторому объему. Они могут иметь форму параллелепипеда, цилиндра, сферы и других пространственных тел с разными законами распределения теплоты.

Если размер объемного источника в направлении одной из осей коор-

динат намного меньше размеров в других направлениях, то источник полагают двумерным. В зависимости от вида поверхности, на которой располагается источник, он может быть плоским, цилиндрическим, сферическим, коническим и так далее. В каждом из них теплота распределена по занимаемому участку поверхности по тому или иному закону (рис. 2.1) Цифрами на рисунке обозначены коды источника (см. далее п. 3.3.5). Любой из источников, кроме точечного, может быть ограниченным или неограниченным. Ограничение может быть по одной, двум или трем координатным осям.

### 3.2.2. Закон распределения интенсивности источника

Закон распределения интенсивности (плотности теплового потока) является одной из важнейших характеристик источника. В процессах механической обработки, как правило, возникает несколько источников теплоты. Чтобы для каждого из них установить тепловую мощность, необходимо:

- 1) определить общую тепловую мощность процесса;
- 2) распределить последнюю между конкретными источниками, возникающими в данной технологической операции, то есть составить приходную часть теплового баланса (см. уравнение (1.1)).

Если тепловая мощность данного источника ( $Q$ , Дж/с) распределенного по некоторому объему, расположенному в системе координат  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , то между элементом тепловой мощности  $dQ$  и интенсивностью источника  $q(x, y, z)$  существует очевидное соотношение:

$$dQ(x, y, z) = q(x, y, z) dx dy dz. \quad (2.1)$$

В реальных технологических процессах распределение интенсивности источников описывается сложными закономерностями. При теплофизическом анализе прибегают к некоторым идеализированным законам распределения интенсивности источников и стоков в пространстве и во времени [3].

Рассмотрим некоторые идеализированные законы, часто встречающиеся при теплофизическом анализе процессов механической обработки материалов.

Самым простым является равномерное стационарное распределение, когда интенсивность  $q_0$  не зависит от координат и времени.

$$q_{03} = \frac{Q}{\underbrace{\iiint_V dx dy dz}_V} = \frac{Q}{V} (\text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{с}));$$

$$q_{02} = \frac{Q}{\underbrace{\iint_F dx dy}_F} = \frac{Q}{F} (\text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})); \quad q_{01} = \frac{Q}{\underbrace{\int_L dx}_L} = \frac{Q}{L} (\text{Дж}/(\text{м} \cdot \text{с})).$$

Соответственно для трех-, двух- и одномерного источников, что отмечено индексами при  $q$ .

Следующую группу представляют источники с линейно распределенной интенсивностью. В качестве примера рассмотрим линейный призматический источник, ограниченный в трех направлениях, интенсивность которого в двух направлениях распределена по линейным законам, а в третьем – равномерно (рис. 2.2). Для этого источника

$$q(x, y, z) = q_0 - k_1 x - k_2 y. \quad (2.2)$$

Из условий  $q(\ell, 0, z) = 0$  и  $q(x, \Delta, z) = 0$  получаем:

$$k_1 = \frac{q_0}{\ell}; \quad k_2 = \frac{q_0}{\Delta} \cdot \left(1 - \frac{x}{\ell}\right).$$

Тогда:

$$q \cdot (x, y, z) = q_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left(1 - \frac{y}{\Delta}\right)$$

$$Q = q_0 \cdot \int_0^{\ell} dz \int_0^{\Delta} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot dx \int_0^{\Delta} \left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) \cdot dy$$

Откуда:

$$q_0 = \frac{4Q}{\ell \cdot \Delta} \text{ (Джс / (м}^3 \cdot \text{с))}. \quad (2.3)$$

Следовательно:

$$q \cdot (x, y, z) = \frac{4Q}{\ell \cdot \Delta} \cdot (1 - \psi) \cdot (1 - \nu). \quad (2.4)$$

где  $\psi = \frac{x}{\ell}$ ;  $\nu = \frac{y}{\Delta}$  – безразмерные абсцисса и ордината любой точки внутри источника. На рис. 2.2 приведен двумерный источник с распределением интенсивности по экспоненциальному закону  $q(x) = q_0 \exp[-kx]$  по оси ОХ и равномерного по оси ОZ. Используя (2.1), получаем при  $u = \exp[-3] = \exp[-k \cdot \ell] \cong 0,047$ . Поэтому если источник в точке  $x = \ell$  имеет интенсивность, близкую к нулю, можно положить  $k \cdot \ell \approx 3$ , и  $k = 3/\ell$

$$q(\psi) = \frac{3Q}{\ell} \cdot \exp[-3\psi]. \quad (2.5)$$

Большую группу идеализированных источников составляют источники с распределением интенсивности по нормальному закону. К этой группе относятся нормально-линейные, нормально-плоские (полосовые), нормально-круговые и нормально-объемные источники теплоты. Общим для этих источников является то, что распределение интенсивности вдоль одной, двух или трех осей координат подчиняется закону нормального распределения. На рис. 2.3 приведен двумерный ограниченный источник длиной  $b$  и шириной  $2\ell$ . Вдоль оси ОХ он имеет закон распределения:

$$q(x) = q_0 \exp[-k \cdot x^2], \quad (2.6)$$

а вдоль оси OZ распределен равномерно. Коэффициент  $k$ , характеризующий «остроту» кривой нормального распределения, называют коэффициентом сосредоточенности теплового потока. Для нормально-плоского источника имеем:

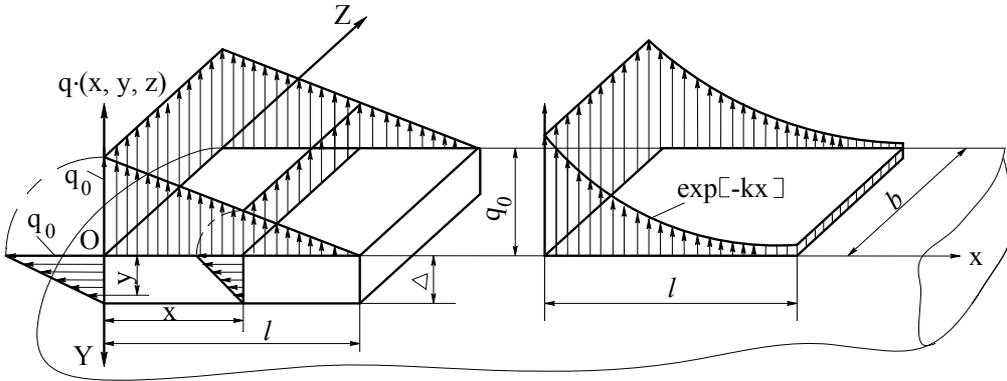


Рис. 2.2. Источники с распределением интенсивности по линейному и экспоненциальному законам.

$$Q = q_0 \int_{-l}^{+l} \exp[-k \cdot x^2] \cdot dx. \quad (2.7)$$

известно, что:

$$\int_{u_1}^{u_2} \exp[-p^2 u^2] \cdot du = \frac{\sqrt{\pi}}{2p} \cdot [\Phi(pu_2) - \Phi(pu_1)], \quad (2.8)$$

где  $\Phi(pu)$  – функция интеграла вероятности Гаусса, иногда обозначаемая  $\text{erf}[pu]$ . Используя формулу (2.7), получаем:

$$q(x) = \frac{Q \sqrt{k} \cdot \exp[-kx^2]}{\sqrt{\pi} \Phi(l\sqrt{k})} \approx \frac{\sqrt{3}Q}{\sqrt{\pi} \sqrt{3} \cdot l} \cdot \exp[-3\Psi^2]. \quad (2.9)$$

В правой части выражения учтено, что при  $k \ell^2 \approx 3$ ,  $\Phi(\sqrt{3}) \approx 1$ .

Нормально-круговой двумерный источник описывается уравнением

$$q(r) = \frac{3Q}{\pi R^2} \cdot \exp[-3\rho^2] \quad (2.10)$$

где  $\rho = \frac{r}{R}$  – безразмерный текущий радиус.

Большое распространение имеют комбинированные источники. Рассмотрим источник, в котором на первой части контактной площадки теплота распределена равномерно, а на второй – по некоторой убывающей кривой, которая хорошо аппроксимируется экспонентой.

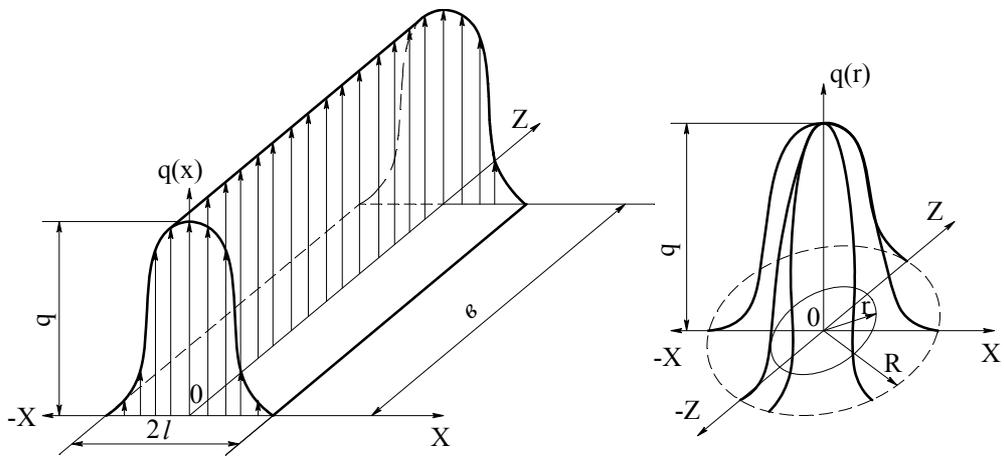


Рис. 2.3. Нормально распределенные источники: полосовой и круговой  
Для него:

$$Q = q_0 \cdot b \cdot l' + \frac{1}{3} \cdot q_0 \cdot b \cdot (l - l') \quad (2.11)$$

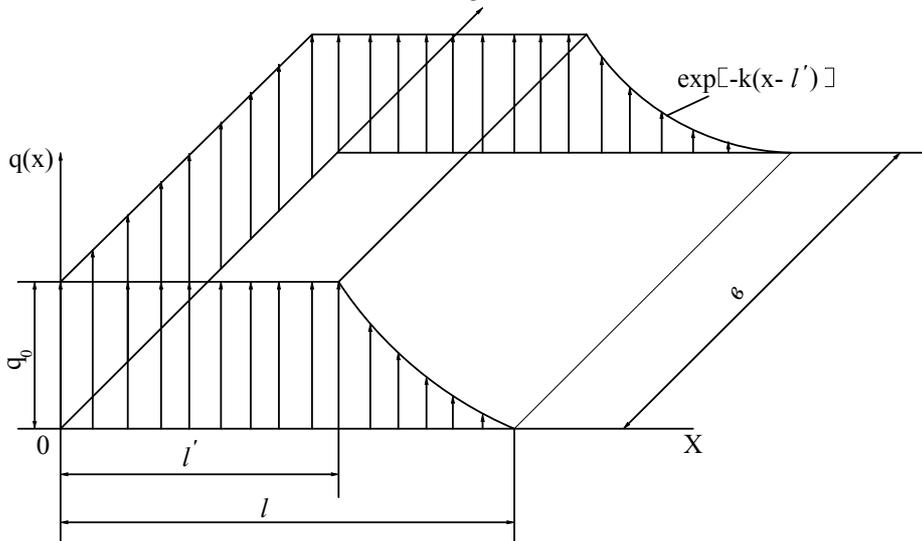


Рис. 2.4. Источник с комбинированным законом распределения  
Определив  $q_0$ , получаем формулы для описания законов распределения интенсивностей:

$$\begin{aligned} \text{при } 0 \leq x \leq l' \quad q_0 &= \frac{3Q}{b \cdot l \cdot (2\varepsilon + 1)}, \\ \text{при } l' \leq x \leq l \quad q &= \frac{3Q}{b \cdot l \cdot (2\varepsilon + 1)} \cdot \exp\left[-3 \cdot \frac{\psi - \varepsilon}{l - \varepsilon}\right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\psi = \frac{x}{l}$ ;  $\varepsilon = \frac{l'}{l}$ .

### 3.2.3. Скорость перемещения и длительность функционирования источника

Скорость перемещения источников в теплофизических расчетах обычно характеризуют безразмерным критерием Пекле [4]:

$$Pe = \frac{v \cdot \ell}{a}, \quad (2.13)$$

где  $v$  – скорость движения источника;  $\ell$  – характерный линейный размер;  $a$  – коэффициент температуропроводности.

Если  $Pe = 0$  – источник – неподвижный, если  $Pe \geq 10$ , то источник быстро движущийся; при  $0 < Pe < 10$  – источник движется с любой скоростью.

Скорость перемещения быстро движущегося источника превышает скорость распространения теплоты в данном теле, то есть теплота не распространяется впереди источника, а только под ним и позади него. В большинстве случаев механической обработки материалов источники можно считать быстро движущимися.

В теплофизических расчетах время функционирования источника описывают безразмерным критерием Фурье (обозначения – см. выше,  $\tau$  – время):

$$Fo = \frac{a \cdot \tau}{\ell^2}. \quad (2.14)$$

По времени функционирования источники можно разделить на:

- 1) мгновенные ( $Fo \rightarrow 0$ );
- 2) действующие в течение конечного промежутка времени;
- 3) действующие периодически;
- 4) действующие столь длительное время, что процесс теплообмена можно считать стационарным.

Предельные значения критерия  $Fo$ , соответствующие переходу от нестационарного к стационарному теплообмену, зависят от конкретной теплофизической обстановки в зоне обработки.

Мгновенных источников на практике не существует, но в некоторых технологических процессах тепловыделение происходит столь коротковременно, что длительностью этого импульса можно пренебречь. Мгновенный источник используется как некоторая абстракция, позволяющая конструировать математические выражения для описания в сложных случаях.

## 3.3. Общие принципы схематизации тел и источников, участвующих в теплообмене при механической обработке материалов

### 3.3.1. Дифференциальное уравнение теплопроводности и условия однозначности

При выводе дифференциального уравнения теплопроводности (1.21) не накладывается никаких ограничений ни на форму тела, из которого

выделен элементарный объем, ни на условия взаимодействия поверхности этого тела с окружающей средой. Если решить дифференциальное уравнение теплопроводности с учетом частных особенностей данной технологической системы (ТС), то можно получить описание температурного поля в этой ТС.

Частные особенности, дающие совместно с дифференциальным уравнением теплопроводности полное математическое описание процесса теплообмена в конкретной задаче, называют условиями однозначности [7]. В этих условиях должны быть оговорены:

- 1) форма, размеры и теплофизические характеристики тела (системы тел), в котором происходит процесс передачи теплоты;
- 2) закон распределения плотности теплового потока и другие характеристики источников и стоков, действующих в рассматриваемом процессе;
- 3) распределение температур в рассматриваемой системе тел до того, как начался изучаемый процесс (*начальные условия*);
- 4) условия теплообмена на поверхностях тела, соприкасающихся с окружающей средой или с другими телами, входящими в систему (*граничные условия*).

Выстроить условия однозначности для конкретной задачи можно только упрощая в той или иной мере ее особенности, т.е. производя схематизацию процесса теплообмена. Это значит, что фактические тела и источники, действующие в реальном процессе, заменяют телами и источниками более простой формы, приближенно описывающими оригиналы. Условия взаимодействия тел с окружающей средой также схематизируют, заменяя сложные ситуации, имеющие место в действительности, более простыми.

Схематизация делается с целью облегчения математического описания процесса теплообмена в конкретных задачах. Учет всех тонкостей и особенностей конкретной задачи невозможен с точки зрения математики, т.к. каждое ограничение выражается соответствующим уравнением в исходной системе уравнений вместе с дифференциальным уравнением теплопроводности. Кроме того, при решении практических задач не всегда необходимо учитывать все стороны и детали явления, тем более что усложнение задачи на стадии ее постановки приводит к значительным погрешностям в вычислительном процессе.

Таким образом, разумная схематизация формы тел, источников, начальных и граничных условий, учитывающая с одной стороны определенную степень детализации процесса, а с другой – интересы его описания доступными математическими средствами, является важнейшим этапом теплофизического анализа.

### 3.3.2. Схематизация теплофизических свойств обрабатываемых материалов

Одним из важных вопросов является необходимость учитывать зависимость теплофизических характеристик (коэффициента теплопроводности  $\lambda$  и объемной теплоемкости  $c\rho$ ) от температуры. В достаточно широком диапазоне температур зависимости  $\lambda(t)$  и  $c\rho(t)$  описывается уравнениями  $\lambda(t) = a_1 + a_2 \cdot t + a_3 \cdot t^2$  и  $c\rho(t) = b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2$ , причем значения коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  зависят от химического состава и термической обработки материалов. В более узких диапазонах температур зависимости  $\lambda(t)$  и  $c\rho(t)$  можно в первом приближении полагать линейными по отношению к температуре  $t$ . Однако даже линеаризация зависимостей  $\lambda(t)$  и  $c\rho(t)$  позволяет получить аналитическое решение дифференциального уравнения теплопроводности только в редких случаях.

Поэтому на основании работ многих исследователей можно прийти к следующим рекомендациям: для большой группы углеродистых, низко- и среднелегированных сталей в областях режимов, характерных для механической обработки, можно полагать теплофизические свойства не зависящими от температуры. Такое же решение можно принять и по отношению к быстрорежущим сталям, теплофизические свойства которых вообще сравнительно мало зависят от температуры. В любом случае снизить погрешности расчетов можно следующими путями:

- 1)  $\lambda$  и  $c\rho$  в ходе расчетов принимать для средних значений температур в описываемом диапазоне их изменения;
- 2) применять численные методы для решения дифференциального уравнения теплопроводности.

### 3.3.3. Схематизация формы тела

Реальную конфигурацию тел, участвующих в ТС, приводят к одной из упрощенных форм, показанных на рис. 3.1. При схематизации учитывают, что любое ограничение формы тела любой поверхностью приводит к усложнению математической постановки задачи.

Допустимость той или иной идеализации формы реальных тел определяется:

- 1) соотношением между размерами площадок, занимаемых источниками теплоты, и размерами нагреваемого тела;
- 2) временем от начала процесса теплообмена до момента времени, для которого рассчитывают температуры;
- 3) наличием пассивных граничных поверхностей;
- 4) требуемой точностью расчета.

Чем меньше размеры источника по отношению к размерам нагреваемого тела, тем меньше влияние конкретной формы тела на температурное поле в обла-

ти, прилежащей к источнику. Влияние конкретной формы тела на температуру областей, прилежащих к источнику, тем меньше, чем короче период тепловыделения. Опыт показывает, что при практически применяемых размерах деталей, размерах и длительности процесса механической обработки реальную форму обрабатываемого предмета, можно, как правило, заменять полупространством, резе – неограниченной пластиной совсем редко – телами с большей степенью ограничения.

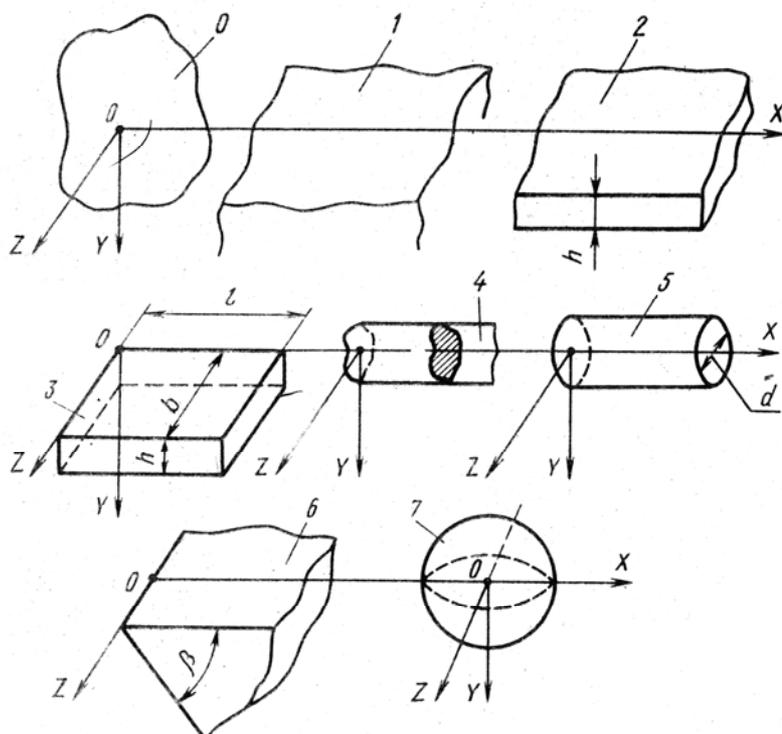


Рис. 3.1. Идеализированные формы твердых тел:  
 0 – неограниченное пространство; 1 – полупространство; 2- пластина;  
 3 – параллелепипед; 4 – неограниченный стержень;  
 5 – стержень (цилиндр) конечной длины;  
 6 – неограниченный клин с углом  $\beta$ ; 7 – шар

**Пример.** Рассматривается сравнение полосового равномерно распределенного источника, движущегося по цилиндру и полупространству. При этом принято, что за пределами контакта цилиндр охлаждается так, что через каждый оборот материал его встречается с источником, имея одну ту же начальную температуру.

Отношение:

$$L_m = \frac{\theta_1^{max}}{\theta_2^{max}},$$

будем называть коэффициентом формы одного тела по отношению к другому. Из рисунка 3.2 [3] видно, что с точностью до 5 % при  $Pe > 10$  и  $d \geq 20l$ , можно заменять цилиндр полупространством.

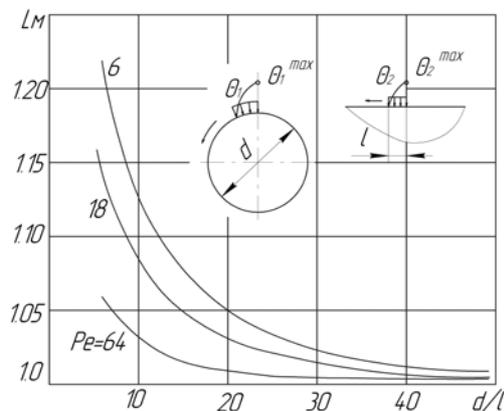


Рис. 3.2. Коэффициент формы тела.

Иногда, необходимо деформировать форму тела (например, стружка – прямой стержень того или иного сечения), но деформация должна быть минимально необходимой, а объем тела, и количество поступающего и отводимого тепла, сохранялись неизменными. Для идеализации формы тел широко пользуются

понятием пассивных поверхностей.

*Пассивными* называют такие поверхности, температура которых и ее градиент в течение теплового процесса изменяются незначительно и этим изменением можно пренебречь. Пассивная граничная поверхность может быть отодвинута или придвинута на любое расстояние, также можно изменять и ее форму.

### 3.3.4. Начальные и граничные условия

Начальные условия отвечают на вопрос о том, каково было температурное поле в момент времени, принятый за начало отсчета. Они описываются выражением  $t|_{\tau=0} = f_0(x, y, z)$ . Так как часто температура компонентов ТС в начальный момент времени равна температуре окружающей среды, то удобно вести расчет в т.н. избыточных температурах, считая, что  $f_0(x, y, z) = 0$ , а затем по окончании расчета к результату прибавлять  $t_0$ .

Граничными называются условия, взаимодействия поверхностей тел с окружающей средой. Граничные условия бывают 4-х родов.

При *граничных условиях 1-го рода* предполагают, что известен закон распределения температуры на поверхностях тела.

$$t_s = f_s(x, y, z, \tau) \quad (3.1)$$

*Граничные условия 2-го рода* предусматривают, что известен закон распределения плотности тепловых потоков.

$$q_s = \varphi(x, y, z, \tau), \quad (3.2)$$

следующих через граничные поверхности.

Граничные условия 3-го рода используются в том случае, когда теплообменом поверхности с окружающей средой пренебречь нельзя. В этом случае используют закон теплоотдачи – закон Ньютона-Рихмана.

$$q_s = \alpha \cdot (t_s - t_0), \quad (3.3)$$

где  $t_0$  – температура окружающей среды.

Этот закон дает возможность определить количество теплоты  $q_s$  (Вт/м<sup>2</sup>), которое в единицу времени отводится в окружающую среду. В соответствии с законом Фурье к поверхности твердого тела подводится поток:

$$q_s = -\lambda \text{grad } t_s = -\lambda \frac{\partial t_s}{\partial n}, \quad (3.4)$$

следовательно:

$$\alpha \cdot (t_s - t_0) = -\lambda \frac{\partial t_s}{\partial n}$$

$$\text{или } \frac{\partial t_s}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_s - t_0). \quad (3.5)$$

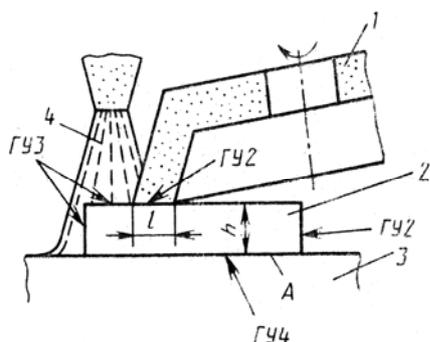


Рис. 3.3. Плоское шлифование торцом круга: 1 – круг; 2 – заготовка; 3 – магнитный стол; 4 – струя жидкости.

Граничные условия 4-го рода возникают, тогда когда твердые тела находятся в беззазорном контакте с другим твердым телом и между ними происходит теплообмен.

Распределив между соприкасающимися телами теплоту, образующуюся на контактной поверхности, и рассчитав плотность теплового потока в каждом из тел, граничные условия 4-го рода можно записать в виде.

$$\lambda_1 \cdot \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{x_1} = \lambda_2 \cdot \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{x_2}. \quad (3.6)$$

Такой случай имеет место при обработке металлов давлением, при резании металлов на участках соприкосновения режущего инструмента со стружкой и деталью. Пример различных граничных условий в технологической системе резания при плоском шлифовании приведен на рис. 3.3.

### 3.3.5. Кодирование тепловых источников

Производя описанную выше схематизацию формы тел и источников теплоты, можно выполнить кодирование тепловой задачи по формуле [4]:

$$\frac{MKO}{P.CD} TУ, \quad (3.7)$$

где  $M$  – мерность;  $K$  – конфигурация;  $O$  – ограниченность источника

теплоты;  $P$  – закон распределения источника;  $C$  – его скорость;  $D$  – длительность функционирования;  $T$  – форма тела, на котором действует источник;  $Y$  – род граничных условий.

Таблица 3

### Кодирование тепловых задач

| Символ | Признак источника и тела   | Коды       |
|--------|--|------------|
| М<br>К | Точечный: одно-, двух- и трехмерный.   | 0; 1; 2; 3 |
|        | Прямой, плоский (полосовой, прямоугольный), призматический.                          | 1          |
|        | Кольцевой, круговой, цилиндрический.   | 2          |
|        | Шаровый  | 3          |
| О      | Неограниченный: ограниченный по направлению одной, двух или трех осей координат      | 0; 1; 2; 3 |
| Р      | Распределенный равномерно  | 1          |
|        | Распределенный линейно   | 2; 3       |
|        | Распределенный по экспоненте   | 4          |
|        | Нормально распределенный несимметричный  | 5; 6       |
|        | Нормально распределенный симметричный  | 7          |
|        | Комбинированный  | 8          |
| С      | Неподвижный; движущийся; быстро движущийся   | 0; 1; 2    |
| Д      | Мгновенный, действующий некоторое время; действующий длительно (процесс установился) | 0; 1; 2    |
| Т      | Неограниченное тело; полупространство; пластина; параллелепипед.                     | 0; 1; 2; 3 |
|        | Стержень неограниченный  | 4          |
|        | Стержень, ограниченный с одной стороны   | 5          |
|        | Стержень конечной длины  | 6          |
| У      | Цилиндр. клин. шар   | 7.8.9      |
|        | Граничные условия 1.2.3.4- го рода   | 1.2.3.4    |

**Пример.** Двумерный источник, плоская площадка которого ограничена в двух направлениях, симметрично нормально распределенный по направлению оси  $X$ , равномерно распределенный по оси  $Y$ , движется с заданной скоростью в течение длительного времени по поверхности полупространства с граничными условиями третьего рода. Код задачи:

$$\frac{MKO}{P.CD} TY = + \frac{212}{710.12} 13$$

Кодирование в примере произведено в соответствии с кодами, приведенными в табл. 3.

## 3.4. Аналитические методы решения теплофизических задач

### 3.4.1. Общая характеристика методов решения дифференциального уравнения теплопроводности

Существует три основные группы методов решения дифференциального уравнения теплопроводности [4]: аналитические, численные и методы математического моделирования. К аналитическим относят: классический метод не-

посредственного интегрирования, операционные методы (метод интегрального преобразования Лапласа) и метод источников теплоты.

Классический метод непосредственного интегрирования состоит в нахождении совокупности частных решений, удовлетворяющих дифференциальному уравнению теплопроводности, а затем их наложении (суперпозиции), для отыскания интересующей нас функции. При этом каждое из частных решений ищется, как правило, в виде произведения двух функций, одна из которых зависит от времени, а другая – от координат. В технологической теплофизике классический метод нашел весьма ограниченное применение ввиду чисто математических трудностей, возникающих при его использовании даже для сравнительно простых технологических схем.

Операционные методы (в частности метод интегрального преобразования Лапласа) используются для решения некоторых задач теплофизики процессов механической обработки. При этом изучается не сама функция (оригинал), а ее видоизменение (изображение), полученное путем умножения оригинала на экспоненциальную функцию, и интегрируется изображение в определенных пределах. После решения задачи в изображениях, нахождение оригинала, т.е. функции, описывающей температурное поле, производится путем обратного преобразования.

Наиболее распространен в технологической теплофизике метод источников теплоты (МИТ). Он представляет собой гибкий, удобный в инженерных приложениях математический аппарат, позволяющий описывать тепловые явления в различных областях техники и технологии. С помощью метода источников сравнительно просто можно написать интеграл, удовлетворяющий дифференциальному уравнению теплопроводности и краевым условиям; дальнейшей задачей является вычисление его значения. В классическом и операционном методах центр тяжести лежит в отыскании самого интеграла, что значительно труднее.

Второй причиной широкого распространения МИТ является то, что в инженерных задачах известны не температуры на поверхностях тел, а мощность тепловых источников.

### **3.4.2. Метод источников теплоты. Основные положения**

Основные положения метода источников состоят в следующем [4]:

- Источник или сток любой формы, движущийся или неподвижный, действующий временно или непрерывно может быть представлен как система точечных мгновенных источников (стоков) теплоты – *принцип конструирования решений*.
- Процесс распространения теплоты в теле ограниченных размеров может быть представлен как процесс распространения теплоты в неограниченном теле, если фактически действующие источники дополнить

некоторой системой фиктивных источников или стоков теплоты – *принцип отражения источников*.

Если источник действует в течение времени  $\tau$ , то его можно представить в виде системы мгновенных точечных источников, вспыхивающих и гаснущих с весьма большой частотой, когда период времени между вспышками  $\Delta\tau \rightarrow 0$ . В этом случае импульсы следуют друг за другом с бесконечно малым промежутком времени и в пределе образуют непрерывно функционирующий источник. Движение источника также имитируют рядом последовательных вспышек и гашений мгновенных импульсов, последовательно возникающих в различных точках траектории перемещения источника.

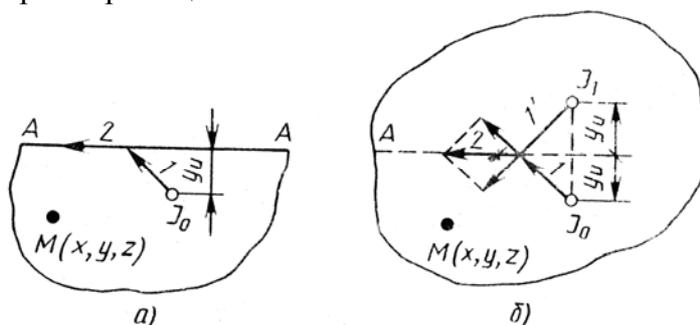


Рис. 4.1. Распределение теплоты в полупространстве с адиабатической поверхностью

Покажем применение второго принципа при описании процесса распространения теплоты в полупространстве с адиабатической поверхностью (граничное условие второго рода  $q_s = 0$ , рис. 4.1). Пусть в полупространстве действует источник  $J_0$ . Тепловой поток от источника доходит до поверхности, а затем движется вдоль нее. Если такой же источник действует в неограниченном теле, то тепловой поток пересечет плоскость  $A-A$ , которая не является адиабатической, и будет продолжать двигаться в направлении 1.

Теперь поместим в неограниченном теле симметрично источнику  $J_0$  источник  $J_1$ . Встречный тепловой поток, идущий в направлении 1', складываясь с тепловым потоком 1, создает равнодействующую, имеющую направление 2, т. е. тоже направление, что и в полупространстве с адиабатической граничной поверхностью. Поэтому можно записать:

$$t_{II}(J_0) = t_H(J_0) + t_H(J_1). \quad (4.1)$$

Если  $y_u = 0$ , то  $t_{II}(J_0) = 2t_H(J_0)$ .

Следовательно, источник, расположенный на адиабатической поверхности полупространства, вызывает в полупространстве температуру в два раза большую, чем такой же источник в неограниченном теле.

Таким образом, в соответствии с принципом конструирования решений сложные источники представляют в виде той или иной системы, состоящей из мгновенных точечных источников теплоты. Поэтому и температурное поле, возникающее под действием источника сложной фор-

мы, получают методом суперпозиции полей, возникающих под действием каждого из мгновенных точечных источников.

Математическое выражение, описывающее температурное поле, которое возникает под действием мгновенного точечного источника, имеет вид:

$$t(x, y, z, \tau) = \frac{Q}{\lambda \cdot \sqrt{a} \cdot (4\pi \cdot \tau)^{3/2}} \cdot \exp\left[-\frac{R^2}{4a\tau}\right], \quad (4.2)$$

где  $Q$  – количество теплоты, внесенной в тело источником;

$\tau$  – время, прошедшее от момента теплового импульса;

$$R = \sqrt{(x - x_u)^2 + (y - y_u)^2 + (z - z_u)^2}, \quad (4.3)$$

расстояние от места вспышки источника  $J(x_u, y_u, z_u)$  до какой-либо точки тела  $M(x, y, z)$ .

Код тепловой задачи, решение которой получено Кельвином, имеет вид:

$$\frac{000}{000.00} 01,$$

Уравнение Кельвина называют фундаментальным решением дифференциального уравнения теплопроводности. Чтобы описать с помощью этого уравнения температурное поле под действием различных источников теплоты, в зависимости от поставленной задачи, совершают один или два из следующих *интегральных переходов*:

- 1) от точечного источника к одно-, двух-, или трехмерному;
- 2) от мгновенного источника, к действующему непрерывно;
- 3) от мгновенного источника, к движущемуся.

Рассмотрим методику этих переходов. Применим уравнение Кельвина в виде:

$$t(x, y, z, \tau) = Q \cdot F(R, \tau). \quad (4.4)$$

Представим одномерный источник, расположенный параллельно оси  $Z$ , в виде множества одновременно действующих элементарных источников. Каждый из элементарных источников вносит в нагреваемое тело теплоту  $dQ = Q(z_u) \cdot dz_u$ , Дж, где  $Q(z_u)$  – тепловыделение по длине одномерного источника, Дж/м. Элементарный источник вызовет повышение температуры  $dt = Q(z_u) \cdot F(R, \tau) \cdot dz_u$ . Полное повышение температуры, под действием всех точечных источников, образующих одномерный, получим, совершая интегральный переход 1-го типа.

$$t(x, y, z, \tau) = \int_{z_{u1}}^{z_{u2}} Q(z_u) \cdot F(R, \tau) \cdot dz_u. \quad (4.5)$$

Интегрирование отражает суперпозицию элементарных температур, которая возможна только тогда, когда теплофизические свойства мате-

риала приняты не зависящими от температуры. Количество тепла  $Q(z_u)$  можно представить в виде:

$$Q(z_u) = Q_1 \cdot f(z_u), \quad (4.6)$$

где  $f(z_u)$  – закон тепловыделения по длине источника. Итак:

$$t(x, y, z, \tau) = \frac{Q_1}{\lambda \cdot \sqrt{a} \cdot (4\pi\tau)^{3/2}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-x_u)^2 + (y-y_u)^2}{4a\tau}\right] \times \\ \times \int_{z_{u1}}^{z_{u2}} f(z_u) \cdot \exp\left[\frac{(z-z_u)^2}{4a\tau}\right] \cdot dz_u \quad (4.7)$$

Применим это выражение к расчету температурного поля в задаче  $\frac{110}{001.00}$  т. е. при источнике одномерном, неограниченном, распределенном вдоль оси  $Z$ . Для него  $f(z_u) = 1$ ,  $z_{u1} = -\infty$ ;  $z_{u2} = +\infty$ . Используя подстановку:

$$u = \frac{z-z_u}{\sqrt{4a\tau}}, \quad (4.8)$$

и интеграл вероятности Гаусса:

$$\int_{u1}^{u2} \exp[-p^2 u^2] \cdot du = \frac{\sqrt{\pi}}{2p} \cdot [\Phi \cdot (pu_2) - \Phi \cdot (pu_1)], \quad (4.9)$$

причем  $\Phi(0) = 0$ ;  $\Phi(-\infty) = -1$ ;  $\Phi(+\infty) = 1$ :

$$dz_u = du \cdot \sqrt{4a\tau}, \quad p = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-u^2] \cdot du \sqrt{4a\tau} = \sqrt{4a\tau} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 2 = \sqrt{4\pi a\tau}, \quad (4.10)$$

тогда выражение для температуры преобразуется к виду:

$$t(x, y, \tau) = \frac{Q_1}{4\pi\lambda\tau} \cdot \exp\left[-\frac{(x-x_u)^2 + (y-y_u)^2}{4a\tau}\right] \quad (4.11)$$

Как видно из этой формулы, температурное поле для одномерного неограниченного источника не зависит от координаты  $z$ , т.е. оказывается плоским. Это соответствует физике процесса, поскольку при неограниченной длине равномерно распределенного источника отсутствует переток теплоты вдоль оси  $Z$ .

По аналогии с вышеизложенным для двумерного источника получим:

$$t(y, \tau) = \frac{Q_2 \cdot \sqrt{a}}{2 \cdot \lambda \cdot \sqrt{\pi\tau}} \cdot \exp\left[-\frac{(y-y_u)^2}{4a\tau}\right]. \quad (4.12)$$

То есть температурное поле в этой задаче при равномерном распределении источника не зависит от координат  $X$  и  $Z$ . Это значит, что в каком бы месте мы не выделили из неограниченного тела 1 стержень 3, па-

параллельно оси Y, то независимо от формы поперечного сечения стержня, температура в нем при равномерном тепловыделении источника 2 может быть рассчитана по формуле (4.12) (иллюстрацию – см. рис. 4.2).

В равной мере эта формула справедлива для расчета температур в отдельном стержне с любой конфигурацией поперечного сечения при условии, что его боковые поверхности не обмениваются теплотой с окружающей средой ( $q_s = 0$ ).

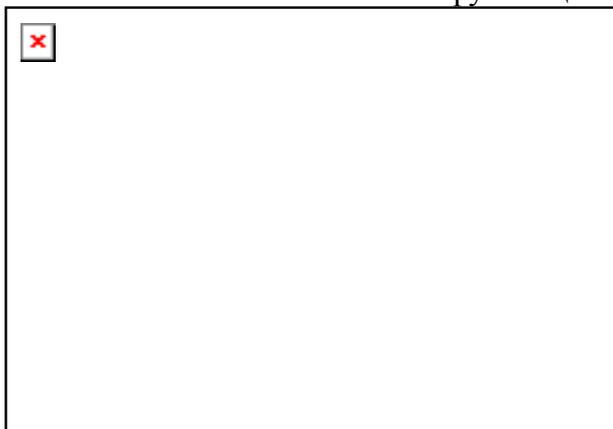


Рис 4.2. Плоский равномерно распределенный источник теплоты в неограниченном теле, и в стержне с адиабатическими граничными поверхностями

### 3.4.3. Непрерывно действующие источники

Рассмотрим интегральный переход второго типа. Непрерывное действие источника имитируем серией мгновенных тепловых импульсов, следующих друг за другом. Предположим, что первый из этих импульсов произошел в момент времени  $\theta = 0$ , принятый за начало отсчета. Вторым, третьим,  $i$ -тый импульсы происходили соответственно в моменты времени  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i$ . Нас интересует результат действия всех этих импульсов к моменту времени  $\tau$ , который будем называть моментом наблюдения. Порция теплоты, внесенная за период времени  $\tau - \theta_i$  вызывает повышение температуры:

$$dt = q \cdot F(R, \tau - \theta_i) \cdot d\theta_i, \quad (4.13)$$

где  $q$  – количество теплоты, выделяемой источником в единицу времени, Вт.

Все мгновенные точечные источники, следовавшие друг за другом с интервалом времени  $d\theta_i$  вызовут в точке  $M(x, y, z)$  к моменту наблюдения  $\tau$  повышение температуры:

$$t(x, y, z, \tau) = q \cdot \int_0^{\tau} F(R, \tau - \theta_i) \cdot d\theta_i, \quad (4.14)$$

учитывая значение функции  $F(R, t)$ , запишем:

$$t(x, y, z, \tau) = \frac{q}{\lambda \cdot \sqrt{a} \cdot (4\pi)^{3/2}} \cdot \int_0^{\tau} \frac{d\theta_i}{(\tau - \theta_i)^{3/2}} \cdot \exp\left[-\frac{R^2}{4a \cdot (\tau - \theta_i)}\right]. \quad (4.15)$$

Положив:

$$P^2 = \frac{R^2}{4 \cdot a}, \quad u = \frac{l}{\sqrt{\tau - \theta}},$$

тогда:

$$du = -\frac{dt_i}{z \cdot (\tau - \theta_i)^{3/2}}, \quad (4.16)$$

получим:

$$t(x, y, z, \tau) = \frac{q}{4\pi\lambda R} \cdot \left( 1 - \Phi \cdot \left( \frac{R}{\sqrt{4a\tau}} \right) \right). \quad (4.17)$$

Это выражение представляет собой решение тепловой задачи, код которой  $\frac{000}{000.01}01$ . Если процесс нагревания тела непрерывно действующим источником теплоты установился, то:

$$t(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\lambda R}. \quad (4.18)$$

Эти выражения позволяют составлять формулы для расчета температурных полей в неограниченном теле, возникающих под действием одно-, двух и трехмерных источников с различными законами теплообразования.

### 3.4.4. Интегральный переход третьего типа

Для того, чтобы получить формулу, описывающую процесс распространения теплоты от движущегося источника, необходимо выполнить третий интегральный переход. По сути, он является разновидностью второго. Следует лишь учесть, что расстояние  $R$  для движущегося источника является переменной величиной. Например, если источник движется вдоль оси  $X$  со скоростью  $v$ , то:

$$R_i = \sqrt{[x - v \cdot (\tau - \theta_i)]^2 + (y - y_u)^2 + (z - z_u)^2}, \quad (4.19)$$

$$t(x, y, z, \tau) = q \cdot \int_0^{\tau} F(R_i, \tau - \theta_i) \cdot d\theta_i. \quad (4.20)$$

Рассмотрим одномерный источник  $J_1$  с равномерно распределенной мощностью тепловыделения  $q_1$ , Вт/м (рис. 4.3), движущийся из т. $O_1$  по направлению стрелки со скоростью  $v$ , м/с. Источник попадает последовательно в положения  $1, 2, \dots, i, \dots$ , каждый раз внося в тело элементарную порцию теплоты  $dQ_1$  на единице длины. Каждый из таких импульсов, например,  $i$ -й, можем рассматривать как мгновенный одномерный источник вспыхнувший и погасший на расстоянии  $R_i$  от точки  $M(x, y)$ . Этот импульс в соответствии с формулой (4.11) вызовет в точке  $M$  элементарное повышение температуры:

$$dt = \frac{dQ_1}{4\pi\lambda\theta} \cdot \exp\left[-\frac{(x-x_u)^2 + y^2}{4a\theta}\right], \quad (4.21)$$

так как  $y_u = 0$  (источник лежит в плоскости  $XOZ$ ). Свяжем систему координат с движущимся источником. Пусть в момент наблюдения  $\tau$  система с источником находится в точке  $O$ . Тогда время распространения теплоты импульса  $\theta_i$  равно  $\tau - \theta_i$ , а абсцисса этого импульса  $x_u = v(\tau - \theta_i)$ .

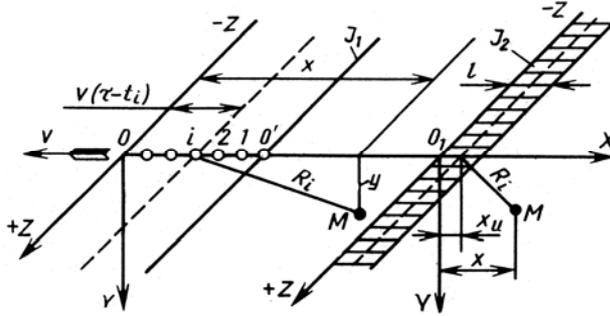


Рис. 4.3. Движущийся одномерный  $J_1$  и двумерный (полосовой)  $J_2$  источники теплоты

Далее заметим, что  $dQ_1 = q_1 \cdot d\theta_i$  и:

$$dt = \frac{q_1}{4\pi\lambda} \cdot \frac{d\theta_i}{\tau - \theta_i} \cdot \exp\left[-\frac{[x - v \cdot (\tau - \theta_i)]^2 + y^2}{4a(\tau - \theta_i)}\right] \quad (4.22)$$

Все импульсы, которыми имитируется движение источника, дадут в точке  $M(x, y)$  общее повышение температуры:

$$t(x, y, \tau) = \frac{q_1}{4\pi\lambda} \cdot \exp\left[\frac{vx}{2a}\right] \cdot \int_0^\tau \frac{d\theta_i}{\tau - \theta_i} \cdot \exp\left[-\frac{v^2 \cdot (\tau - \theta_i)^2 + x^2 + y^2}{4a(\tau - \theta_i)}\right] \quad (4.23)$$

Эта формула описывает температурное поле в тепловой задаче  $\frac{110}{001.11} 01$ .

Интеграл в этом выражении приводится к изученным функциям только при  $\tau \rightarrow \infty$ ,

т. е. для задачи, код которой  $\frac{110}{001.12} 01$ .

В этом случае, полагая:

$$w = \frac{v^2 \cdot (\tau - \theta_i)}{a} \quad \text{и} \quad u = \frac{v \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{2 \cdot a}$$

преобразуем выражение для расчета  $t(x, y, z)$  к виду:

$$t(x, y) \frac{q_1}{2\pi\lambda} \cdot \exp\left[\frac{vx}{2a}\right] \cdot K_0\left[\frac{v \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{2a}\right], \quad (4.24)$$

поскольку:

$$\int_0^{\infty} \frac{dw}{w} \cdot \exp\left[-w + \frac{u^2}{w}\right] = 2K_0[u], \quad (4.25)$$

где  $K_0[u]$  – модифицированная функция Бесселя от мнимого аргумента второго рода, нулевого порядка. С погрешностью, не выходящей за пределы 5 % можно полагать, что:

$$K_0[u] \approx \left(\frac{\pi}{2u}\right)^m \exp[-u], \quad (4.26)$$

причем  $m = 0,342 + 0,053u$  при  $0 \leq u \leq 3$  и  $m = 0,5$  при  $u > 3$ .

От выражения (4.24) можем перейти к формуле для описания температурного поля в задаче  $\frac{211}{101.12} 01$  для полосового источника, движущегося с любой скоростью по оси  $O_1X$ . Если какой-либо из одномерных источников, образующих полосовой, имеет абсциссу  $X_u$ , то расстояние от него до точки  $M(x, y)$  тела равно  $\sqrt{(x - x_u)^2 + y^2}$ . Поэтому переходя от одномерного источника к полосовому с равномерным тепловыделением  $q_2$ , запишем:

$$t(x, y) = \frac{q_2}{2\pi\lambda} \cdot \int_0^l \exp\left[-\frac{v(x - x_u)}{2a}\right] \cdot K_0\left[\frac{v \cdot \sqrt{(x - x_u)^2 + y^2}}{2a}\right] \cdot dx_u \quad (4.27)$$

Используем далее безразмерные координаты:

$$\psi = \frac{x}{\ell}; \quad \psi_u = \frac{x_u}{\ell}; \quad v = \frac{y}{\ell},$$

где  $\ell$  – длина источника в направлении движения. Если  $Pe = \frac{v \cdot \ell}{a}$ , то получим:

$$t(x, y) \frac{q_2 \ell}{2\pi\lambda} \cdot T(\psi, v), \quad (4.28)$$

где:

$$T(\psi, v) = \int_0^1 \exp\left[\frac{Pe}{2} \cdot (\psi - \psi_u)\right] \cdot K_0\left[\frac{Pe}{2} \cdot \sqrt{(\psi - \psi_u)^2 + v^2}\right] \cdot d\psi_u. \quad (4.29)$$

Значения  $T(\psi, v)$  при конкретных значениях  $Pe$ ,  $\psi$ ,  $v$  определяют каким либо из способов приближенного вычисления интегралов. Для решения вопроса о температуре точек тела, лежащих в плоскости  $XO_1Z$  ( $v = 0$ ) можно в качестве первого приближения воспользоваться выражением для  $K_0[u]$ . Например, наибольшее значение функции  $T(\psi, v) = T(1, 0) = T_{max}$  можем получить положив  $u = 0,5Pe(\psi - \psi_u)$  и приняв некоторое среднее

значение показателя  $m$  в формуле для  $K_0[u]$ . Интегрирование в этом случае дает следующее выражение:

$$T_{max} = \frac{\pi^m}{1-m} \cdot Pe^m. \quad (4.30)$$

### 3.4.5. Быстродвижущиеся источники

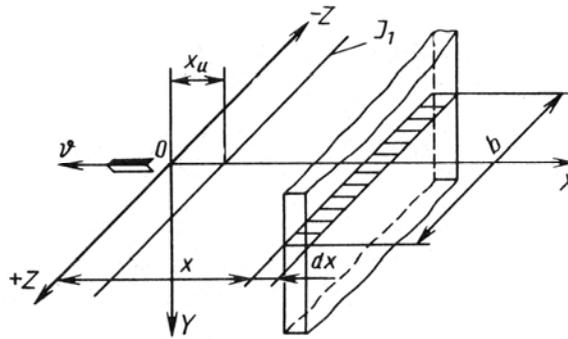


Рис. 4.4. Одномерный быстродвижущийся источник теплоты  $J_1$

Методику получения формул для быстродвижущихся источников теплоты покажем на примере тепловой задачи  $\frac{110}{001.22} 01$ . Пусть одномерный источник  $J_1$  с равномерно распределенной плотностью тепловыделения  $q_1$  движется с высокой скоростью  $v$  в направлении, показанном стрелкой на рисунке. Система координат  $XYZ$  движется вместе с источником. Выделим из неограниченного тела элемент в виде стержня шириной  $b$  и толщиной  $dx$ . Вследствие высокой скорости движения время «проскакивания» источника через этот элемент  $d\theta = \frac{dx}{v}$  столь мало, что на участке  $b \cdot dx$  температуру можно считать одинаковой во всех точках, а сам источник в этом элементе полагать двумерным мгновенным.

Для такой задачи мы уже получили уравнение (4.12) при осуществлении первого интегрального перехода. Чтобы применить эту формулу к данному случаю, отметим, что  $y_u = 0$ , а время, прошедшее с того момента, когда источник «проскочил» элемент  $dx$ , до момента наблюдения  $\tau = \frac{x - x_u}{v}$ . Что

касается тепловыделения  $Q_2$  двумерного источника, то оно связано с плотностью  $q_1$  тепловыделения одномерного источника уравнением теплового баланса для площадки  $b \cdot dx$ , а именно  $b \cdot q_1 dt = b Q_2 dx$  откуда

$$Q_2 = q_1 \left( \frac{dx}{dt} \right)^{-1} = \frac{q_1}{v}. \text{ Подставляя эти преобразования в формулу (4.12), получим для быстродвижущегося одномерного источника:}$$

$$t(x, y) = \frac{q_1 \cdot \sqrt{a}}{2\lambda \cdot \sqrt{\pi\nu(x-x_u)}} \cdot \exp\left[-\frac{\nu y^2}{4a(x-x_u)}\right]. \quad (4.31)$$

Возвратимся к полосовому источнику  $J_2$  и предположим, что он быстро движущийся. Тогда для этого источника:

$$t(x, y) = \frac{q_2 \cdot \sqrt{a}}{2\lambda \cdot \sqrt{\pi\nu}} \cdot \int_0^p \frac{dx_u}{\sqrt{x-x_u}} \cdot \exp\left[-\frac{\nu y^2}{4a(x-x_u)}\right]. \quad (4.32)$$

Верхний предел интегрирования  $p$  зависит от абсциссы  $x$  точки, для которой рассчитывается температура. Если  $x \geq l$ , то  $p = l$ , т. к. на температуру точки  $M$  влияют все одномерные источники, образующие плоский. Если же  $x < l$ , то  $p = x$ , т. к. теплота, выделяемая быстро движущимся источником, впереди источника не распространяется.

Используя безразмерные координаты  $\psi$ ,  $\psi_u$ ,  $\nu$ , получим

$$t(x, y) = \frac{q_2 \sqrt{al}}{2\lambda \cdot \sqrt{\pi\nu}} \cdot \int_0^{\Delta} \frac{d\psi_u}{\sqrt{\psi - \psi_u}} \cdot \exp\left[-\frac{Pe}{4} \cdot \frac{\nu^2}{\psi - \psi_u}\right]. \quad (4.33)$$

или:

$$t(x, y) = \frac{q_2 \cdot l}{\lambda \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Pe}} \cdot T_1(\psi, \nu), \quad (4.34)$$

где:

$$T_1(\psi, \nu) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\Delta} \frac{d \cdot \psi_u}{\sqrt{\psi - \psi_u}} \cdot \exp\left[-\frac{Pe}{4} \cdot \frac{\nu^2}{\psi - \psi_u}\right]. \quad (4.35)$$

Верхний предел интеграла  $\Delta = \psi$  при  $0 \leq \psi \leq 1$  и  $\Delta = 1$  при  $\psi > 1$ . Для точек, лежащих в плоскости движения источника ( $\nu = 0$ ), выполняя интегрирование, получаем:

$$\text{при } 0 \leq \psi \leq 1, T_1 = \sqrt{\psi}; \quad (4.36)$$

$$\text{при } \psi > 1, T_1 = \sqrt{\psi} - \sqrt{\psi - 1}. \quad (4.37)$$

Относительная температура  $T_1(\psi, \nu)$  при  $\psi = 1$  и  $\nu = 0$  имеет наибольшее значение  $T_{1max} = 1$ .

До сих пор мы рассматривали источники, тепловыделение которых равномерно распределено по пятну нагрева. Если теплота распределена на пятне нагрева по какому-либо другому закону, то методика интегральных переходов остается прежней, но под соответствующие интегралы дополнительно вводится функция, описывающая закон распределения плотности тепловых потоков. Например, если тепловыделение быстро движущегося полосового источника описывается формулой  $q_2(\psi) = q_0 f(\psi)$ , то вместо выражения (4.35) получаем:

$$t(x, y) = \frac{q_2 \cdot \sqrt{al}}{2\lambda \cdot \sqrt{\pi\nu}} \cdot \int_0^A \frac{f(\psi_u) \cdot d\psi}{\sqrt{\psi - \psi_u}} \cdot \exp\left[-\frac{Pe}{4} \cdot \frac{\nu^2}{\psi - \psi_u}\right]. \quad (4.38)$$

Соответственно видоизменяется и функция  $T_1(\psi, \nu)$ , значения которой приходится определять методами приближенного интегрирования.

### 3.5. Конвективный теплообмен

#### 3.5.1. Роль конвективного теплообмена в процессе резания металлов

Резание материалов сопровождается протеканием целого комплекса сложных процессов и явлений. К ним можно отнести: разрушение материала, упругую и пластическую деформацию, образование новой поверхности, механическое взаимодействие компонентов системы резания, теплообмен между ними и рассеяние энергии, адсорбцию, коррозию под механическим напряжением, газонасыщение, возникновение поверхностных трещин, облучение элементарными частицами, электрические процессы и многие другие явления.

При этом теплота, идущая в инструмент и в деталь, активизирует адгезионные и диффузионные процессы на контактных поверхностях, изменяет условия протекания контактных процессов. Все это приводит к увеличению износа инструмента, снижению точности обработки и повышению шероховатости обработанной поверхности. Для повышения стойкости инструментов необходимо снизить общую тепловую напряженность процессов резания и обеспечить интенсивный отвод теплоты от нагретых участков зоны резания и режущего инструмента.

Основную роль в снижении в теплонапряженности процесса резания играют охлаждающие способности различных веществ и способы их подвода в зону резания. Охлаждающие вещества должны обладать высокой теплопроводностью и объемной теплоемкостью, значительной скрытой теплотой парообразования и низкой вязкостью. Действие охлаждающей среды при резании сопровождается конвективным теплообменом, способствующим снижению температурных деформаций и повышению стойкости инструмента, а также испарением и излучением.

#### 3.5.2. Основные положения теории пограничного слоя

Поскольку основным предметом нашего рассмотрения должно явиться взаимодействие свободно или вынужденного движущегося потока жидкости или газа с поверхностью твердого тела необходимо вспомнить основные положения теории пограничного слоя [7].

Теплоотдача твердому телу зависит от распределения температуры в потоке жидкости или газа. Температурное поле в свою очередь зависит от гидродинамической обстановки в потоке жидкости, которая сложилась к заданному моменту времени. Следовательно, для решения тепловой задачи вначале необходимо найти распределения скоростей, т. е. решить гидродинамическую задачу. Если считать жидкость несжимаемой, ( $\rho = \text{const}$ ), а теплоемкость постоянной ( $c = \text{const}$ ), то в математическую формулировку гидродинамической задачи войдет *уравнение неразрывности*:

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial \tau}, \quad (5.1)$$

*система уравнений движения Навье-Стокса*

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \cdot \frac{Dv_x}{D\tau} = X - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 \cdot v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdot v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \cdot v_x}{\partial z^2} \right) \\ \rho \cdot \frac{Dv_y}{D\tau} = Y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 \cdot v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdot v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \cdot v_y}{\partial z^2} \right) \\ \rho \cdot \frac{Dv_z}{D\tau} = Z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 \cdot v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdot v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \cdot v_z}{\partial z^2} \right) \end{array} \right., \quad (5.2)$$

где  $\frac{Dv}{D\tau}$  – полная или субстанциональная производная (оценивает действительное ускорение, которое испытывает частица, проходя вдоль линии тока в поле скорости);

$X, Y, Z$  – проекции на оси координат внешних сил, действующих на элемент объема жидкости;

$P$  – давление внутри жидкости;

$\mu$  – коэффициент динамической вязкости;

$v$  – скорость элемента объема жидкости.

*и уравнения, описывающие граничные условия 1, 2, 3 или 4-го рода.*

Главная трудность возникает при решении уравнений Навье-Стокса, которые представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Кроме того, три уравнения содержат четыре неизвестных –  $v_x, v_y, v_z, P$ . Только при больших упрощениях, эти уравнения удалось решить. Например, при натекании жидкости из бесконечности на бесконечную стенку.

Известны приближенные решения уравнений Навье-Стокса для так называемого ползущего движения, первого предельного случая, очень малой скорости. Но наибольший интерес представляет второй предельный случай – очень малой вязкости жидкости при большой скорости. Метод упрощения дифференциальных уравнений Навье-Стокса для второго предельного случая был разработан Прандтлем. В 1904 г он представил по этому поводу доклад Международному конгрессу математиков в Гейдельберге.

Сущность метода поясним на примере стационарного плоскопараллельного потока жидкости, омывающего пластину. Поток жидкости, омывающий тело, мысленно разбивают на две области: пограничный слой 1 и внешний поток 2.

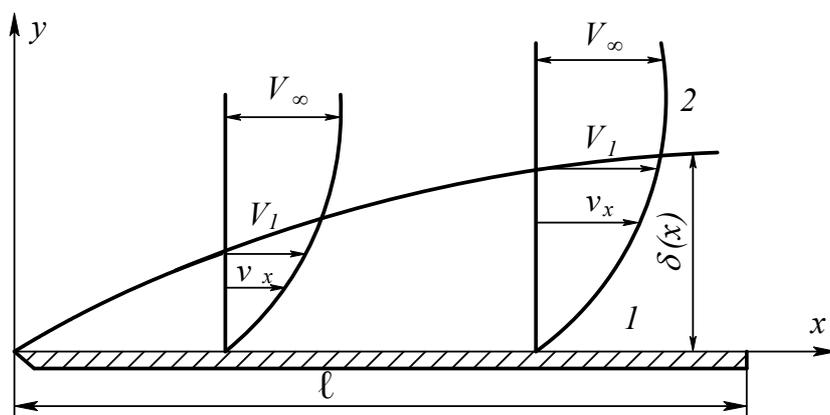


Рис. 5.1. Гидродинамический пограничный слой.

*Гидродинамическим (динамическим) пограничным слоем* называют область течения вязкой теплопроводной жидкости, характеризующейся малой толщиной  $\delta(x)$  по сравнению с продольными размерами области (например, длиной пластины  $l$ ,  $\delta(x) \ll l$ ) и большим поперечным градиентом, скорости  $\frac{dv_x}{dy}$ . Скорость жидкости  $v_x$  у стенки равна нулю (эффект прилипания).

Переход  $v_x$  к  $V_\infty$  осуществляется асимптотически. Однако практически величина  $v_x$  достигает значения  $v$ , близкого к  $V_\infty$  ( $v_l = 0,99 V_\infty$ ) в очень тонком слое, толщина которого обычно принимается за толщину пограничного слоя  $\delta(x)$ .

То есть, для гидродинамического пограничного слоя удастся значительно упростить уравнения Навье-Стокса. Полученные после упрощения уравнения называют уравнениями динамического пограничного слоя. Для внешнего потока уравнения Навье-Стокса так же упрощаются (последнее слагаемое с  $\mu$  пропадает, т. к. силами внутреннего трения в жидкости пренебрегают).

Итак, исследуемый поток разбивается на две части и задача математического описания течения жидкости при этом упрощается.

Наряду с динамическим пограничным слоем существует также и *тепловой пограничный слой*. Он характеризуется большим поперечным градиентом температуры, под действием которого осуществляется поперечный перенос теплоты. Распределение температур внутри движущейся несжимаемой жидкости в случае нестационарного трехмерного температурного поля описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + v_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \quad (5.3)$$

Для теплового пограничного слоя удается упростить это уравнение. Полученное после упрощения уравнение называют уравнением энергии теплового пограничного слоя. Можно получить точное аналитическое решение (распределение температуры в пограничном слое) этого уравнения, если из гидродинамической задачи определено распределение скорости пограничного слоя. Точные решения уравнений динамического и теплового пограничного слоев трудоемки, а в ряде случаев и не возможны, потому в инженерных расчетах часто пользуются приближенными методами решения указанных уравнений (метод теории подобия – см. п. 3.5.4 – 3.5.8).

Таким образом, сущность теории пограничного слоя состоит в упрощении уравнений, описывающих процесс теплообмена между твердым телом и омывающей его жидкостью на основании применения их к малой пространственной области – пограничному слою и отыскания методов решения полученных после упрощения уравнений.

Для решения задачи теплоотдачи от жидкости или газа к твердому телу рассмотренные уравнения осталось дополнить граничными условиями. Чаще всего используют граничные условия третьего рода (см. п. 3.3.4):

$$\alpha(t_s - t_0) = -\lambda_0 \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)_y = 0, \quad (5.4)$$

где  $\lambda_0$  – коэффициент теплопроводности среды;

$y$  – ось системы координат с началом на поверхности теплообмена, направленная внутрь жидкости и твердого тела;

$t_s, t_0$  – собственно температура поверхности и среды;

$\alpha$  – коэффициент теплоотдачи.

### 3.5.3. Факторы, влияющие на величину коэффициента теплоотдачи

В пределах ламинарного теплового пограничного слоя теплота распространяется только теплопроводностью. Так как коэффициент теплопровод-

ности газов и обычных жидкостей мал, интенсивность теплоотдачи определяется термическим сопротивлением этого слоя, т. е.  $\alpha = \frac{\lambda}{\delta}$ . Основываясь на

этой зависимости можно без аналитического аппарата сделать качественную модель влияния ряда факторов на величину коэффициента теплоотдачи.

*Влияние скорости потока  $v$ .* С увеличением скорости потока жидкости или газа толщина пограничного слоя  $\delta$  уменьшается, следовательно,  $\alpha$  возрастает.

*Влияние вязкости  $\mu$ .* Чем выше вязкость, тем больше касательные силы вязкого трения, тем толще оказывается пограничный слой. Это должно приводить к уменьшению  $\alpha$ . Снижение интенсивности теплоотдачи обусловлено также ухудшением перемешивания с ростом вязкости.

*Влияние плотности  $\rho$ .* Уменьшение плотности влечет за собой рост толщины пограничного слоя, следовательно, снижение коэффициента теплоотдачи. К этому следует добавить, что теплота, переносимая единицей объема пропорциональна плотности, что усиливает влияние плотности на интенсивность теплоотдачи.

*Коэффициент теплопроводности  $\lambda$*  находится в прямой связи с коэффициентом теплоотдачи. С ростом  $\lambda$  растет и  $\alpha$ .

С ростом теплоемкости  $c$  также возрастает интенсивность теплоотдачи.

Форма ( $\Phi$ ) и размеры ( $l_1, l_2, l_3$ ) тела существенно влияют на его обтекание жидкостью и, следовательно, на формирование и толщину пограничного слоя. Это приводит к изменению  $\alpha$ .

Направление теплового потока при одной и той же разности температур также влияет на интенсивность теплоотдачи. Если теплота передается от жидкости к стенке, то у поверхности последней оказываются слои жидкости с более низкой температурой, что приводит к большей вязкости жидкости в пограничном слое. Это в свою очередь вызывает увеличение толщины пограничного слоя, а значит – снижение  $\alpha$ . Таким образом, коэффициент теплоотдачи является функцией очень большого числа факторов:

$$\alpha = f(v, \Phi, \rho, \lambda, c, l_1, l_2, l_3, t_{жс}, t_c, \dots). \quad (5.5)$$

Из проведенного анализа следует, что процессы гидродинамики и теплообмена органично связаны между собой. А система дифференциальных уравнений, описывающих эти процессы (уравнения (5.1) – (5.4)), очень сложна для аналитического решения. Многие практические задачи удастся решить с применением теории подобия.

### 3.5.4. Основные положения теории подобия

В развитие теории подобия внесли вклад такие ученые, как О. Рейнольдс, Л. Прандтль, в нашей стране – Д.П. Рябушинский, М.В.Кирпичев,

А.А. Гухман, М.А. Михеев и многие другие. Именами этих ученых названы критерии (числа) подобия.

Физические явления, процессы или системы подобны, если в сходственные моменты времени в сходственных точках пространства значения переменных величин, характеризующих состояние одной системы, пропорциональны соответствующим величинам другой системы. Коэффициенты пропорциональности для каждой из величин называется коэффициентом подобия. Физическое подобие является обобщением элементарного и наглядного понятия геометрического подобия. При геометрическом подобии существует пропорциональность (подобие) сходственных геометрических элементов подобных фигур или тел. При физическом подобии поля соответствующих физических параметров двух систем подобны в пространстве и времени. Например, при кинематическом подобии существует подобие полей скоростей для двух рассматриваемых движений; при динамическом подобии реализуется подобие систем действующих сил или силовых полей различной физической природы (силы тяжести, силы давления, силы вязкости и т.п.); гидродинамическое подобие (например, подобие двух потоков жидкости или газа) предполагает наличие геометрического, кинематического и динамического подобия; при подобии тепловых процессов подобны соответствующие поля температур и тепловых потоков; при электродинамическом подобии — поля токов, нагрузок, мощностей, поля электромагнитных сил. Все перечисленные виды подобия – частные случаи физического подобия. С развитием исследований сложных физических и физико-химических процессов, включающих механические, тепловые и химические явления, развиваются и методы теории подобия для этих процессов. Пропорциональность для подобных явлений всех характеризующих их параметров приводит к тому, что все безразмерные комбинации, которые можно составить из этих параметров, имеют для подобных явлений одинаковые численные значения. Безразмерные комбинации, составленные из определяющих параметров рассматриваемых явлений, называются критериями подобия. Любая комбинация из критериев подобия также представляет собой критерий подобия рассматриваемых физических явлений.

Таким образом, при наличии подобия физических явлений существуют комплексы величин, называемые числами подобия, которые для подобных явлений должны иметь одинаковое значение. Рассмотрим основные безразмерные комплексы, которые называют числами или критериями подобия, для тепловых и гидродинамических явлений [2].

*Основные числа теплового подобия.*

$$Nu = \frac{\alpha \cdot \ell}{\lambda_0} \quad (5.6)$$

*Число Нуссельта* является мерой соотношения между интенсивностью теплоотдачи и интенсивностью теплопроводности в пограничном слое ( $\lambda_0$  – коэффициент теплопроводности в потоке жидкости или газа).

$$Bi = \frac{\alpha \cdot \ell}{\lambda_s} \quad (5.7)$$

*Число Био* является мерой соотношения между внутренним термическим сопротивлением тела и термическим сопротивлением теплоотдачи на его поверхности ( $\lambda_s$  – коэффициент теплопроводности твердого тела, т.е. стенки, с которой контактирует поток жидкости или газа).

$$Pe = \frac{v \cdot \ell}{a} \quad (5.8)$$

*Число Пекле* является мерой отношения конвективного и молекулярного переноса теплоты в потоке ( $v$  – скорость перемещения потока).

$$Pr = \frac{\nu}{a} \quad (5.9)$$

*Число Прандтля* является мерой подобия температурных и скоростных полей в потоке.

$$Fo = \frac{\alpha \cdot \tau}{\ell^2} \quad (5.10)$$

*Число Фурье* характеризует связь между скоростью изменения температурного поля, физическими свойствами и размерами тела.

*Основные числа гидродинамического подобия.*

$$Re = \frac{v \cdot \ell}{\nu} \quad (5.11)$$

*Число Рейнольдса* характеризует гидродинамический режим движения, являясь мерой отношения сил инерции и сил вязкого трения в потоке ( $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости потока жидкости или газа).

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot \ell^3}{\nu^2} \quad (5.12)$$

*Число Грасгофа* является мерой отношения подъемной силы, возникающей вследствие разности плотностей жидкости, к силе вязкого трения ( $g$  – ускорение свободного падения,  $\beta$  – коэффициент термического расширения жидкости,  $\Delta t$  – разность температур в различных частях системы,  $\ell$  – определяющий линейный размер)

*Определяющий размер и определяющая температура.* В зависимости от особенностей явления в качестве линейного размера могут использоваться диаметр канала, высота стенки, ее длина и т. п. Тот линейный размер, который использован в каждом конкретном случае при вычислении чисел подобия, называется определяющим линейным размером.

В числа подобия входят характеристики физических свойств вещества, зависящие от температуры. Та температура, для которой находятся эти характеристики при определении величины числа подобия, называется определяющей температурой. В качестве определяющей может выбираться температура жидкости  $t_0$ , температура стенки  $t_s$ , или среднее значение температуры  $t_m = \frac{t_0 + t_s}{2}$ . Для указания на соответствующую температуру числа подобия снабжаются соответствующими индексами.

### 3.5.5. Общий вид критериальных уравнений и методика решения задач

Общий вид уравнения подобия для тепловых процессов:

$$Nu = C \cdot Re^k \cdot Gr^m \cdot Pr^n \quad (5.13)$$

Определяемым здесь является критерий (число) Нуссельта, т.к. в него входит коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ . Методика решения задач состоит в следующем:

- 1) на основе анализа особенностей рассматриваемого процесса выбирается конкретное уравнение подобия;
- 2) определяют величину числа Нуссельта;
- 3) определяют коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ ;
- 4) найденное значение  $\alpha$  подставляют в уравнение Ньютона-Рихмана и определяют переданное в пространство количество теплоты:

$$Q = \alpha \cdot F \cdot (t_s - t_0). \quad (5.14)$$

### 3.5.6. Типичные случаи конвективного теплообмена

Из разнообразных случаев конвективного теплообмена тел в потоке среды можно выделить следующие типичные случаи [7]: продольное обтекание средой пластин, плит, труб и др. каналов (рис. 5.2); поперечное обтекание средой различных тел (рис. 5.3); сквозное течение среды в теле (рис. 5.4).

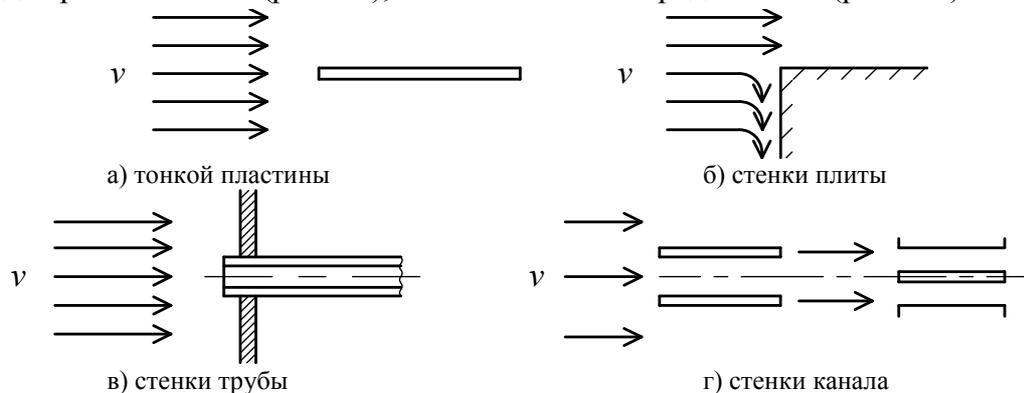


Рис. 5.2. Продольное обтекание средой

Во всех этих и других случаях конвективный принос тепла может осуществляться в условиях вынужденного и свободного перемещения среды

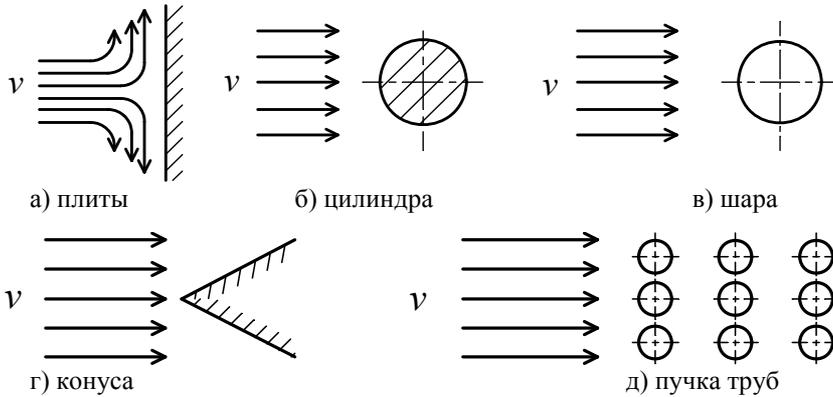


Рис.5.3 Поперечное обтекание средой

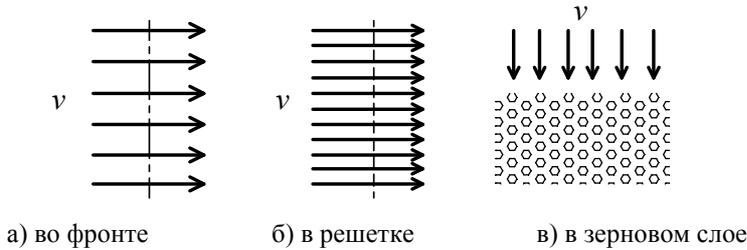


Рис. 5.4. Сквозное течение среды

### 3.5.7. Теплоотдача при естественной конвекции

Рассмотрим определение  $\alpha$  при естественной конвекции. При обтекании тел средой, движение которой вызвано только различием температур среды у поверхности тела и в отдалении от нее перемещение масс среды, происходит под действием подъемной силы, возникающей в поле тяготения при изменении плотности нагреваемой и охлаждающей среды (т. е. возникает Архимедова сила). Ограниченная скорость гравитационной конвекции среды позволяет не учитывать тепло трения.

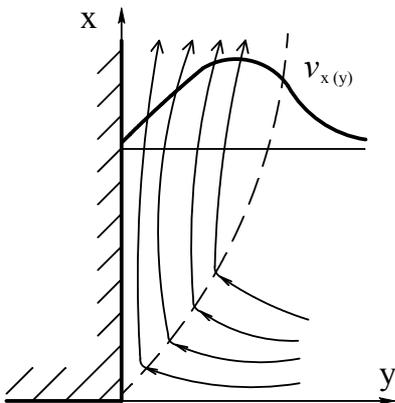


Рис. 5.5. Теплоотдача вертикальной плиты

Рассмотрим [7], какая гидродинамическая обстановка соответствует обтеканию вертикальных плит, вертикальных валов и горизонтальных плит (см. рис.5.5, 5.6 и 5.7).

Все эти случаи можно описать

уравнением вида [6]:

$$Nu = C_i \cdot (Gr \cdot Pr)^n. \quad (5.15)$$

Причем  $C_1$  относится к теплоотдаче вертикальных и горизонтальных валов (характерный линейный размер соответственно длина и диаметр вала), шаров и вертикальных плит (характерный размер – высота плиты);

$C_2$  – горизонтальные плиты при теплоотдаче, направленной вверх;

$C_3$  – при теплоотдаче, направленной вниз.

Значения коэффициента  $C_i$  и показателя степени  $n$  в зависимости от произведения  $Gr \cdot Pr$  приведены в таблице 4 [6].

Таблица 4

| $Gr \cdot Pr$                 | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $n$   |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| $10^{-3} - 10^2$              | 1,18  | 1,53  | 0,83  | 0,125 |
| $5 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^7$ | 0,54  | 1,70  | 0,34  | 0,25  |
| $> 2 \cdot 10^7$              | 0,135 | 0,176 | 0,09  | 0,33  |

Различные значения коэффициентов  $C_1, C_2, C_3$  объясняются изменением условий обтекания тела средой, т. к. при естественной конвекции существенную роль играет размер  $\ell$  омываемой поверхности, измеренный по вертикали. От него зависит толщина пограничного слоя и возможность изменения режима движения от ламинарного к турбулентному на различных участках поверхности твердого тела. Это влияет на среднее значение коэффициента теплоотдачи. С увеличением  $\ell$  значение  $\alpha$  возрастает. Естественная конвекция происходит более интенсивно при теплоотдаче вверх, чем при теплоотдаче вниз, т. к. в последнем случае само тело стоит на пути нагретых частиц жидкости или газа при их движении вверх.

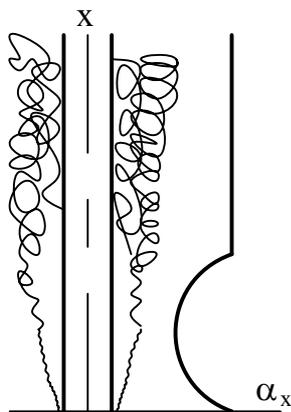


Рис.5.6. Теплоотдача вертикального вала

Если естественная конвекция происходит в воздушной среде, то в уравнение (5.15) могут быть внесены дальнейшие изменения, т. к. для газов значение числа Прандтля ( $Pr$ ) мало меняется с изменением температуры. Возрастание температуры воздуха от  $20^\circ\text{C}$  до  $300^\circ\text{C}$  вызывает изменение значения  $Pr$  на 4 %. Примером критериальной формулы типа (5.15) при условии, что  $Pr^n \approx 1$  является выражение для определения коэффициента теплоотдачи от поверхностей деталей станков при естественной конвекции воздуха [8]:

$$Nu_0 = 0,2K \cdot Gr_0^{0,33}, \quad (5.16)$$

где  $K$  – коэффициент, зависящий от формы и расположения деталей металлорежущего оборудования (приведен в табл.5).

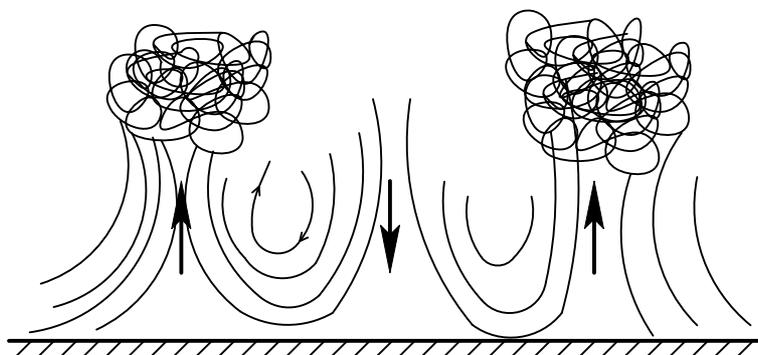


Рис. 5.7. Теплоотдача горизонтальной плиты

Таблица 5

|  |                     |
|--|---------------------|
| Вертикальные и горизонтальные валы и плиты при теплоотдаче, направленной вверх, горизонтальной плиты шириной $< 120$ мм при теплоотдаче вниз | $K = 1,0$           |
| Горизонтальные плиты шириной $v = 120 \dots 400$ мм при теплоотдаче вниз   | $K = \frac{120}{v}$ |
| Горизонтальные и вертикальные винты наружным диаметром $d$ и внутренним $d_1$  | $K = \frac{d_1}{d}$ |

### 3.5.8. Теплоотдача при вынужденной конвекции

В технологических системах твердые тела могут обмениваться теплотой с жидкостью или газом, движущимися принудительно. Теплообмен такого вида возникает на поверхностях заготовки и инструмента, под воздействием смазочно-охлаждающих технологических сред (водных растворов, эмульсий, масел или струй сжатого воздуха). Такой вид теплоотдачи происходит в узлах оборудования, принудительно смазываемых и охлаждаемых маслами или сжатым воздухом (например, в аэродинамических подшипниках).

Для таких случаев имеет место следующее критериальное уравнение [6]:

$$Nu_0 = C \cdot Re_0^m \cdot Pr_0^n \cdot Gr_0^p \cdot \left( \frac{Pr_0}{Pr_s} \right)^{0,25} \quad (5.17)$$

Поправка  $\left( \frac{Pr_0}{Pr_s} \right)^{0,25}$  учитывает направление потока теплоты в жид-

кости. Опыт показывает, что при тепловом потоке, направленном от твердого тела к жидкости, интенсивность теплоотдачи выше, чем наоборот, т. е. при  $t_0 < t_s$

поправка  $\left(\frac{Pr_0}{Pr_s}\right)^{0,25} > 1$ . Значения показателей степени множителей в

формуле (5.17) приведены в табл.6 в зависимости от конкретного случая теплообмена (см. рис. 5.2, 5.3 и 5.4) и значения критерия Рейнольдса [6].

Таблица 6

|          | $Re_0$           | $C$   | $m$  | $n$  | $P$ |
|----------|------------------|-------|------|------|-----|
| рис. 5.2 | $< 2 \cdot 10^3$ | 0,15  | 0,33 | 0,43 | 0,1 |
|          | $> 2 \cdot 10^3$ | 0,021 | 0,8  | 0,43 | 0   |
| рис.5.3  | $< 10^3$         | 0,56  | 0,5  | 0,36 | 0   |
|          | $> 10^3$         | 0,28  | 0,6  | 0,36 | 0   |
| рис. 5.4 | 2 – 200          | 0,106 | 1,0  | 0    | 0   |
|          | 200 - 1700       | 0,61  | 0,67 | 0    | 0   |

При использовании табл. 6 следует иметь ввиду два обстоятельства:

а) при выборе характерного размера здесь при обтекании плит, пластин и стержней в качестве характерного (определяющего) принят размер омываемой поверхности по направлению движения среды. Например, при протекании воздуха через слой частиц произвольной формы (абразивный круг) характерным размером является эквивалентный диаметр  $d_э = \sqrt[3]{6 \cdot V \cdot \pi}$ , где  $V$  – средний объем частиц зерна.

б) когда рассчитывают коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  при поперечном обтекании цилиндрических поверхностей и стержней в реальных производственных условиях, поток жидкости или газа может быть направлен не перпендикулярно к продольной оси цилиндра (стержня), а под некоторым углом  $\varphi$  к ней. В этом случае в формулу (5.17) следует вводить поправку  $\varepsilon = \exp[-4 \cdot 10^{-6} \cdot (90^\circ - \varphi)^3]$ , учитывающую изменение коэффициента теплоотдачи при наклоне струи.

### 3.5.9. Примеры решения задач

**Пример 1.** Определить теплоту, рассеиваемую в окружающую среду шпиндельной бабкой прецизионного станка, если температура ее поверхности  $32^\circ\text{C}$ , температура окружающей среды  $20^\circ\text{C}$ , наружная поверхность бабки  $1,44\text{ м}^2$  (ширина 400 мм, высота 600 мм, длина 600 мм).

Для данного случая применима формула (5.15). Так как шпиндельная бабка ограничена вертикальными поверхностями и крышкой, отдающей теплоту вверх, то  $K = 1$ . В соответствии с уравнением (5.15) критерий Грасгофа должен быть вычислен при температуре окружающей среды.

Вычисляем критерий Грасгофа  $Gr$  при  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ . Для воздуха кинематическая вязкость при этой температуре  $\nu = 15,24 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda = 257,2 \cdot 10^{-4} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot \ell^3}{\nu^2} = \frac{9,81 \cdot (32 - 20) \cdot 0,6^3}{273 \cdot (15,24 \cdot 10^{-6})^2} = 4,01 \cdot 10^8$$

$$Nu_0 = 0,2 \cdot 1 \cdot (4,01 \cdot 10^8)^{0,33} = 138,06 .$$

$$\alpha = \frac{Nu_0 \cdot \lambda}{\ell} = \frac{138,06 \cdot 257,2 \cdot 10^{-4}}{0,6} = 5,95 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$$

Тепловой поток от шпindelной бабки в окружающую среду:

$$Q = \alpha \cdot F \cdot (t_s - t_o) = 5,95 \cdot 1,44(32 - 20) \cong 103 \text{ Вт} .$$

**Пример 2.** В данном случае применяется охлаждение инструмента путем подачи охлаждающей среды в специальные каналы, выполненные

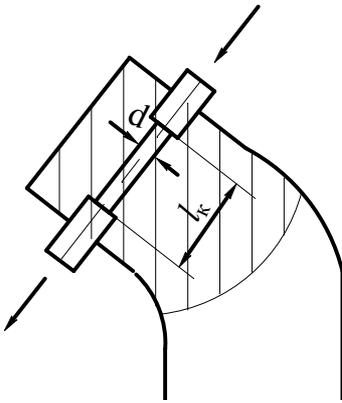


Рис.5.8. Резец с внутренним охлаждением

внутри инструмента (см. рис. 5.8). Определить коэффициент теплоотдачи от стенки резца к охлаждающей воде, если скорость воды  $\nu = 1 \text{ м/с}$ , средняя температура ее  $50^\circ\text{C}$ , а диаметр канала  $d = 5 \text{ мм}$ . Так как в данном случае речь идет о вынужденном движении жидкости, определим режим движения с помощью критерия Рейнольдса:

$$(\nu = 0,556 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \lambda = 0,56 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})) ,$$

$$Re = \frac{\nu \cdot d}{\nu} = \frac{1 \cdot 0,005}{0,556 \cdot 10^{-6}} = 8992 .$$

По табл. 6 определяем коэффициенты уравнения (5.17):

$$Nu_0 = 0,021 \cdot Re_0^{0,8} \cdot Pr_0^{0,43} \cdot \left( \frac{Pr_0}{Pr_s} \right)^{0,25} .$$

Для воды в достаточно широком диапазоне температур (без кипения):

$$Pr_0^{0,43} \cdot \left( \frac{Pr_0}{Pr_s} \right)^{0,25} = 3,8 ,$$

тогда:

$$Nu_0 = 0,021 \cdot (8992)^{0,8} \cdot 3,8 = 116$$

$$\alpha = \frac{Nu_0 \cdot \lambda}{d} = \frac{116 \cdot 0,56}{0,005} = 12992 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К} .$$

Сравнивая результаты, полученные в примерах, можно сделать вывод, что значения коэффициента теплоотдачи в жидкой среде при вынужденной конвекции на несколько порядков превышают значения коэффициента теплоотдачи в газовой среде при свободной конвекции.

### 3.6. Обобщенный алгоритм и методика теплофизического анализа технологических систем при механической обработке

#### 3.6.1. Обобщенный алгоритм теплофизического анализа

Выше были рассмотрены методы математического описания и экспериментального исследования тепловых процессов в твердых телах, жидкостях и газах. Теперь наша задача состоит в том, чтобы показать, как, опираясь на полученные закономерности, проводить *теплофизический анализ* (ТФА) конкретных процессов механической обработки с целью повышения эффективности этих процессов и качества изделий

Всякая ТС состоит из твердых тел, соприкасающихся между собой в той или иной последовательности, а также из жидкостей и газов, окружающих эти тела или циркулирующих внутри них. Каждое из твердых тел ТС имеет одну или несколько контактных поверхностей. Источники и стоки теплоты могут возникать как на этих поверхностях, так и за их пределами. Задача теплофизического анализа состоит в том, чтобы выявить влияние совокупности источников и стоков, действующих в конкретной ТС, на температуру любого из компонентов этой системы [4].

В зависимости от целей анализа, могут быть поставлены задачи определить:

- законы распределения температур на различных участках ТС;
- средние температуры на поверхности тел;
- максимальные температуры, которые возникают в ТС на наиболее нагруженных или ответственных участках.

Если в результате ТФА получена эта информация, то конструктор и технолог могут намечать пути управления тепловыми явлениями, решать задачу об оптимизации системы, повышении производительности процессов обработки и качества изделий.

Обобщенный алгоритм ТФА.

1. Выяснить число и местоположение источников и стоков теплоты в системе или подсистеме. Установить время функционирования и мощность каждого из источников.

2. Определить размеры и конфигурацию площадок или объемов, внутри которых действуют источники или стоки теплоты. Установить (или принять) законы распределения плотности потоков для каждого источника истока.

3. Схематизировать форму и свойства твердых тел, а также форму и другие характерные особенности источников и стоков теплоты.

4. Принять вид математического описания граничных условий на поверхностях твердых тел, не занятых источниками и стоками теплоты.

5. Разработать структурную схему теплообмена.

6. Составить коды тепловых задач для каждого из твердых тел, входящих в структурную схему теплообмена.

7. В соответствии с кодом тепловой задачи установить вид теоретических расчетных формул и поправок к ним, полученным экспериментальным путем. По этим формулам составить расчетные выражения для определения средней температуры на каждой из контактных площадок каждого из твердых тел.

8. Решить совместно выражения для определения средних температур на контактных площадках соприкасающихся тел и таким путем рассчитать плотности итоговых потоков теплообмена между твердыми телами, входящими в ТС.

9. Окончательно сформулировать математические закономерности, отвечающие целям ТФА (распределение температур, средняя или наибольшая температура).

10. Разработать предложения по оптимизации процессов и конструкций в ТС, вытекающих из ТФА.

Рассмотрим подробнее новые понятия: *структурная схема теплообмена и итоговые потоки теплообмена*.

### 3.6.2. Итоговые потоки теплообмена

Понятие об итоговых потоках теплообмена [4] поясним на примере произвольной системы из четырех твердых тел (рис. 6.1). Два тела  $B$  и  $C$  вращаются, не теряя контакта по площадке контакта  $ef$  между собой, а два других  $A$  и  $D$  неподвижны, они непрерывно соприкасаются с телом  $B$  по поверхностям  $ab$  и  $cd$ . Мощности  $W_1, W_2, W_3$  источников теплоты, действующих на площадках  $ab, ef$  и  $cd$ , а также законы распределения плотности тепловых потоков на этих площадках должны быть известны (законами распределения плотностей тепловых потоков, как правило, задаются, а определение мощностей - см. п. 3.7.4).

Проследим маршруты, по которым в системе тел распространяется теплота от источника мощностью  $W_1$ , расположенного на площадке  $ab$ . Первоначально эта теплота распределяется между телами  $A$  и  $B$ . Предположим, что в тело  $B$  направляется поток мощностью  $Q_{IB}$  (теплота от источника 1, непосредственно передаваемая телу  $B$ ). Тогда в тело  $A$  будет поступать поток мощностью  $W_1 - Q_{IB}$ . Эта теплота рассеивается в массе тела  $A$ , а также через наружные поверхности отдается окружающей среде. Теплота  $Q_{IB}$ , поступившая в тело  $B$ , частично рассеивается в его массе и с его наружной поверхности отдается окружающей среде, а частично в виде потоков  $Q_{IBC}$  и  $Q_{IBD}$  через площадки  $ef$  и  $cd$  передается другим телам системы.

Итак, распределение теплоты источника 1 между телами, характеризуется величинами:

$$Q_A^{(1)} = W_1 - Q_{IB}; \quad Q_B^{(1)} = Q_{IB} - Q_{IBC} - Q_{IBD}; \quad Q_C^{(1)} = Q_{IBC}; \quad Q_D^{(1)} = Q_{IBD}. \quad (6.1)$$

Естественно, что:

$$Q_A^{(i)} + Q_B^{(i)} + Q_C^{(i)} + Q_D^{(i)} = W_1. \quad (6.2)$$

Аналогично рассуждая в отношении потоков теплоты от источников мощностью  $W_2$  и  $W_3$  и суммируя для каждого из тел выражения  $Q_A^{(i)} \dots Q_D^{(i)}$ , где  $i = 1, 2, 3$  – номера источников, получим:

$$Q_A = W_1 - Q_{1B} + Q_{3BA}, \quad (6.3)$$

$$Q_B = Q_{1B} - Q_{1BC} - Q_{1BD} + Q_{2B} - Q_{2BA} - Q_{2BD} + Q_{3B} - Q_{3BA} - Q_{3BC}, \quad (6.4)$$

$$Q_C = Q_{1BC} + W_2 - Q_{2B} + Q_{3BC}, \quad (6.5)$$

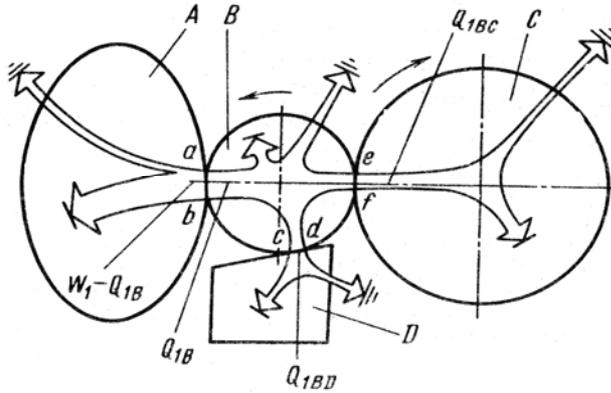


Рис. 6.1. Распределение потоков теплоты в системе тел от источника, действующего на площадке ab.

$$Q_D = Q_{1BD} + Q_{2BD} + W_3 - Q_{3B}, \quad (6.6)$$

В этих выражениях величины  $W_1, W_2, W_3$  известны, тогда как мощность остальных девяти потоков заранее неизвестна. Но эти выражения можно упростить, а число неизвестных уменьшить, если ввести понятие об итоговых потоках теплообмена на контактных поверхностях тел.

Обозначим:

$$Q_1 = Q_{1B} - Q_{2BA} - Q_{3BA}, \quad (6.7)$$

$$Q_2 = Q_{2B} - Q_{1BC} - Q_{3BC}, \quad (6.8)$$

$$Q_3 = Q_{3B} - Q_{1BD} - Q_{2BD}, \quad (6.9)$$

тогда:

$$Q_A = W_1 - Q_1, \quad (6.10)$$

$$Q_B = Q_1 + Q_2 + Q_3, \quad (6.11)$$

$$Q_C = W_2 - Q_2, \quad (6.12)$$

$$Q_D = W_3 - Q_3. \quad (6.13)$$

Каждая из величин  $Q_1, Q_2$  и  $Q_3$  представляет собой алгебраическую сумму мощностей тепловых потоков, движущихся через контактную площадку одного из соприкасающихся тел.

Алгебраическую сумму всех потоков теплопередачи движущихся через контактную площадку двух тел, будем называть *итоговым потоком теплообмена* на этой площадке.

### 3.6.3. Структурная схема теплообмена в системе тел

Структурная схема теплообмена в системе тел [4] представляет собой комплект изображений схематизированных тел с относящимися к ним источниками и стоками теплоты. Тела условно раздвинуты, тепловые контакты между ними заменены итоговыми потоками теплообмена.

В рассмотренном здесь примере: тела  $A$  и  $C$  схематизированы в виде полупространств, тело  $B$  – в виде цилиндра, а тело  $D$  – в виде полубесконечного клина (рис. 6.2). Основные источники теплоты  $W_1, W_2, W_3$  направлены соответственно в тела  $A, C$  и  $D$ , причем принято, что их плотности распределены на площадках  $ab$  и  $cd$  равномерно, а на площадке  $ef$  – по несимметричному нормальному закону.

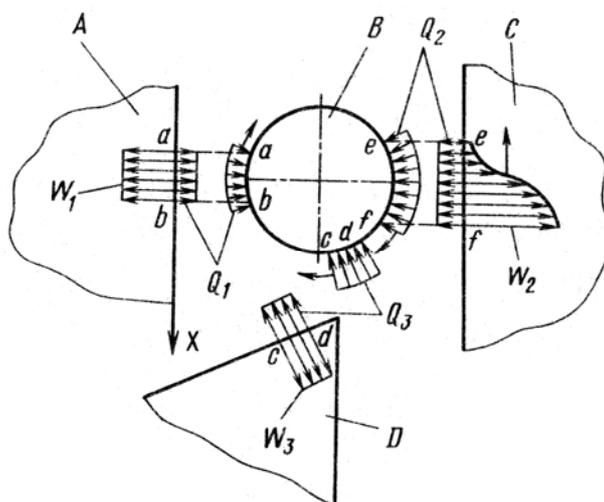


Рис. 6.2. Структурная схема теплообмена между твердыми телами

Плотности итоговых потоков теплообмена приняты распределенными равномерно, что не соответствует действительности. Но для описания распределения плотности итоговых потоков теплообмена надо знать закон распределения температур на контактных площадках, что является конечной целью расчета. Опыт анализа тепловых процессов в ТС показывает, что мощность итоговых потоков существенно ниже, чем мощность теплообразующих источников. Поэтому закон распределения плотности итоговых потоков теплообмена является фактором второго порядка и погрешности, возникающие как результат приближенного описания закона распределения плотности итоговых потоков, относительно невелики.

С помощью структурных схем могут быть легко составлены коды тепловых задач для каждого из тел, участвующих в системе (см. п. 3.3.5):

$$\text{Код } A = +\frac{211}{101.02}12 - \frac{211}{101.02}12 .$$

Слагаемое со знаком «+» относится к источнику  $W_1$ , со знаком «-» - к итоговому потоку  $Q_1$ .

$$\text{Код } B = +\frac{211}{101.02}72 + \frac{211}{101.22}72 + \frac{211}{101.22}72 .$$

$$\text{Код } C = +\frac{211}{601.22}12 - \frac{211}{101.22}12 .$$

$$\text{Код } D = +\frac{211}{101.22}82 - \frac{211}{101.22}82 .$$

### 3.6.4. Плотность итоговых потоков теплообмена

Плотность итоговых потоков теплообмена определяют путем решения балансовой задачи при граничных условиях 4-го рода (см. п. 3.3.4). В этом случае приравнивают друг другу средние температуры соприкасающихся тел на каждой контактной площадке. Для площадки  $ab$ :

$$t_{ab}^{(A)} = t_{ab}^{(B)} , \quad (6.14)$$

где в левой части уравнения – температура площадки контакта, рассчитанная исходя из закономерностей распределения теплоты в теле  $A$ , в правой – то же в теле  $B$ . Аналогично для площадок  $cd$  и  $ef$ :

$$t_{cd}^{(B)} = t_{cd}^{(D)} , \quad (6.15)$$

$$t_{ef}^{(B)} = t_{ef}^{(C)} . \quad (6.16)$$

Как видно из примера, необходимо составить столько уравнений, сколько контактных площадок имеется в системе. В эти уравнения входят средние температуры, значения которых зависят от известных плотностей потоков теплообразующих источников  $W$  и от неизвестных плотностей итоговых потоков теплообмена  $Q$ . Поскольку число неизвестных равно числу уравнений, полученная система имеет единственное решение. В результате решения такой системы каждый из итоговых потоков теплообмена может оказаться со знаком «+» или «-». Знак «+» показывает, что итоговый поток идет в том направлении, которое предусматривалось в структурной схеме.

### 3.7. Инженерная методика расчета температур на контактных площадках твердых тел

#### 3.7.1. Методика расчета температур. Общие положения

Идея инженерной методики [4] состоит в том, что формулы для расчета температур представляют в виде ряда сомножителей, каждый из которых зависит от той или иной особенности источника теплоты и формы тела, на котором расположен источник. Учитывая тот факт, что методика позволяет определять избыточную над температурой окружающей среды температуру в ТС, для обозначения температуры будем использовать символ « $\theta$ » вместо « $t$ ». Формула для расчета температур имеет вид:

$$\theta = A_M \cdot A_C \cdot A_P \cdot A_D \cdot A_K \cdot A_O \cdot A_T, \quad (7.1)$$

где  $A_M$  – коэффициент, зависящий от мерности источника теплоты;

$A_C$  – коэффициент, зависящий от скорости перемещения источника теплоты;

$A_P$  – коэффициент, зависящий от закона распределения источника теплоты;

$A_D$  – коэффициент, зависящий от длительности функционирования источника теплоты;

$A_K$  – коэффициент, зависящий от конфигурации зоны тепловыделения;

$A_O$  – коэффициент, зависящий от ограниченности источника теплоты;

$A_T$  – коэффициент, зависящий от формы тела, на котором расположен источник теплоты.

Формула (7.1) базируется на кодировании тепловых источников (уравнение (3.9)) и пригодна для расчета как средних  $\theta^{sp}$ , так и наибольших  $\theta^{max}$  температур на контактной площадке. Поэтому каждый из сомножителей  $A$  может иметь обозначение  $A^{sp}$  в том случае, если рассчитывают среднюю температуру, и  $A^{max}$ , если определяют максимальное значение температуры контакта.

Опишем алгоритм расчета температур на контактных площадках тел. В общем случае этот алгоритм содержит три ветви, относящиеся к источникам различной мерности ( $M = 1; 2; 3$ ). На рис. 7.1 показана ветвь для двумерных источников ( $M = 2$ ), поскольку они наиболее часто встречаются при теплофизическом анализе технологических систем.

Первый сомножитель в формуле (7.1)

$$A_M = q_0 \cdot \frac{\ell}{\lambda}, \quad (7.2)$$

где  $q_0$  – наибольшая плотность теплового потока,  $Вт/м^2$ ;

$\ell$  – определяющий (характерный) размер источника, м;

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности тела,  $Вт/(м \cdot К)$ .

При расчете  $A_M$  для движущегося источника характерным считают размер площадки контакта по направлению движения источника. Для неподвижного источника в качестве характерного может быть выбран любой конечный размер источника. Но если рассматривают контакт между подвижным и неподвижным

телями, то и для неподвижного источника в качестве характерного следует принимать размер в направлении перемещения движущегося тела.

Второй множитель  $A_C$  характеризует скорость перемещения источника.

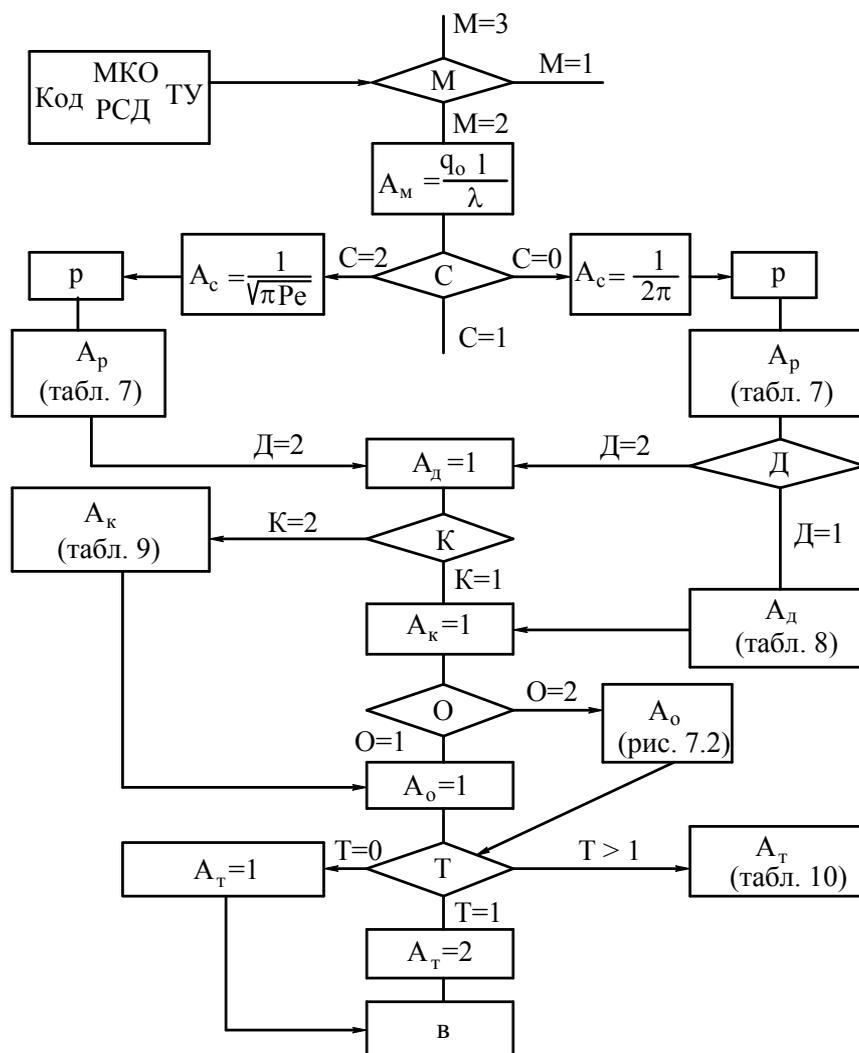


Рис. 7.1. Алгоритм расчета температур на контактных площадках твердых тел

Для быстродвижущихся источников ( $C = 2$ , уравнение (3.9)):

$$A_C = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot Pe}}, \quad (7.3)$$

где  $Pe$  – критерий Пекле ( $Pe \geq 10$ ).

Для неподвижных источников ( $C = 0$ ):

$$A_C = \frac{1}{2 \cdot \pi}. \quad (7.4)$$

Следующий коэффициент  $A_P$  учитывает закон распределения плотности тепловых потоков. В зависимости от значения символов  $P$  и  $C$  в коде источника (3.9) выбирают коэффициенты  $A_P$  по табл. 7.

Таблица 7

| Закон распределения<br>(символ $P$ ) | Коэффициенты $A_P$ |             |             |             |
|--------------------------------------|--------------------|-------------|-------------|-------------|
|                                      | $A_P^{cp.}$        | $A_P^{max}$ | $A_P^{cp.}$ | $A_P^{max}$ |
|                                      | $C=0$              |             | $C=2$       |             |
| 101                                  | 3,06               | 3,31        | 0,67        | 1,00        |
| 201                                  | 1,53               | 1,76        | 0,40        | 0,47        |
| 301                                  | 1,53               | 1,76        | 0,27        | 0,67        |
| 501                                  | 1,49               | 1,86        | 0,36        | 0,44        |
| 601                                  | 1,49               | 1,86        | 0,20        | 0,54        |
| 701                                  | 2,70               | 3,00        | 0,29        | 0,49        |
| 801                                  | -                  | -           | 0,51        | 0,71        |

Коэффициент  $A_D$ , учитывающий длительность функционирования источника, для установившегося теплообмена ( $D = 2$ ), а также для быстро движущихся источников имеет значение  $A_D = 1$ . При нестационарном теплообмене ( $D = 1$ ) значения  $A_D$  (табл. 8) зависят от безразмерного времени, т.е. критерия Фурье (см. формулу (2.14)).

Таблица 8

| Коэффициенты $A_D$ |       |       |       |       |       |       |       |       |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $F_O$              | 0,01  | 0,1   | 0,5   | 1,0   | 5     | 10    | 50    | 100   |
| $A_D$              | 0,107 | 0,315 | 0,534 | 0,653 | 0,857 | 0,942 | 0,968 | 1,000 |

Коэффициент  $A_K$  учитывает конфигурацию площадки, на которой расположен источник. Если площадка имеет вид бесконечной полосы или прямоугольника ( $K = 1$ ), то  $A_K = 1$ . Для источника, имеющего форму круга ( $K = 2$ ), коэффициенты  $A_K$  в зависимости от законов распределения имеют значения, приведенные в табл. 9. Эти коэффициенты рассчитаны для условий стационарного теплообмена ( $D = 2$ ).

Таблица 9

Коэффициенты  $A_K$  для круговых источников  
при стационарном теплообмене

| Символ $P$ | $A_K^{cp.}$ | $A_K^{max}$ | $A_K^{cp.}$ | $A_K^{max}$ |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|            | $C=0$       |             | $C=2$       |             |
| 101        | 0,43        | 0,47        | 0,68        | 0,85        |
| 707        | 0,35        | 0,47        | 1,33        | 1,00        |

Коэффициент  $A_O$  учитывает ограниченность источника. Если источник имеет вид неограниченной полосы ( $O = 1$ ), то  $A_O = 1$ . Такое же значение имеет коэффициент  $A_O$  для кругового источника, поскольку его ограниченность учтена при расчете

значений  $A_K$  для прямоугольных источников, ограниченных в двух направлениях ( $O = 2$ , размер площадки  $b \times \ell$ ), значения  $A_O$  зависят от безразмерного комплекса:

$$\eta = \frac{b}{2 \cdot \ell} . \quad (7.5)$$

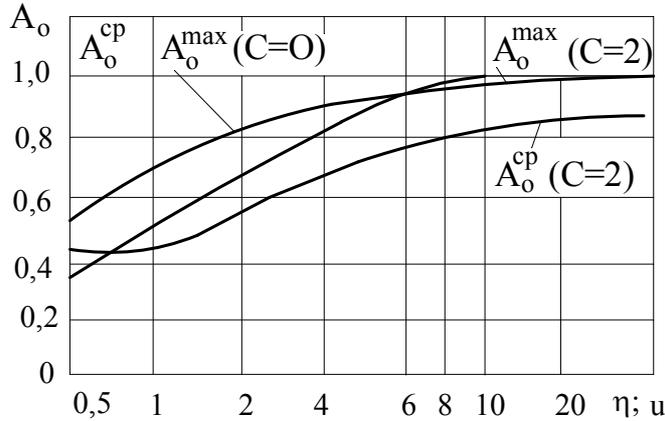


Рис. 7.2. Значения коэффициента  $A_O$

Значения  $A_O$  приведены на рис. 7.2 для неподвижных ( $C = 0$ ) и для быстродвижущихся ( $C = 2$ ) источников. Для неподвижных источников  $A_O^{cp}$ ,  $A_O^{max}$  в первом приближении могут быть приняты одинаковыми, причем при  $\eta \geq 30$  эти коэффициенты мало отличаются от единицы.

Влияние ширины быстродвижущихся источников на температурное поле различно при разных скоростях движения. Поэтому коэффициенты  $A_O$  здесь зависят от значений безразмерного комплекса:

$$u = 2 \cdot \eta \cdot \sqrt{Pe} . \quad (7.6)$$

При  $u > 10$  значения  $A_O^{max}$  близки к единице, а  $A_O^{cp}$ , начиная от значения 0,87, медленно возрастают с увеличением  $u$ .

Коэффициент  $A_T$  учитывает влияние формы нагреваемого тела. Для неограниченного тела ( $T = 0$ ) коэффициент  $A_T = 1$ . Для полубесконечного тела ( $T = 1$ ) с адиабатической границей коэффициент  $A_T = 2$ . В других случаях ( $T > 1$ ) коэффициенты  $A_T$  выбирают по табл. 10. В этой таблице приведены данные для пластин и цилиндров с адиабатическими граничными поверхностями ( $T = 2$  и  $T = 7$ ) при перемещении по ним быстродвижущегося источника ( $C = 2$ ). Значения  $A_T$  рассчитывают по формулам, приведенным в таблице, в зависимости от:

$$u_1 = \left( \frac{\Delta}{\ell} \right)^2 Pe , \quad (7.7)$$

где  $\Delta$  — толщина пластины, м;

$\ell$  — характерный размер источника (рис. 7.3), м.

Для цилиндра в формулу (7.7) вместо  $\Delta$  подставляют диаметр поверхности  $D$ , по которой движется источник (рис. 7.3, б). В табл. 10. даны значения коэффициентов  $A_T$  для случая, когда неподвижный ( $C = 0$ ) источник расположен на одной из поверхностей полубесконечного клина с адиабатическими поверхностями (рис. 7.3, в).

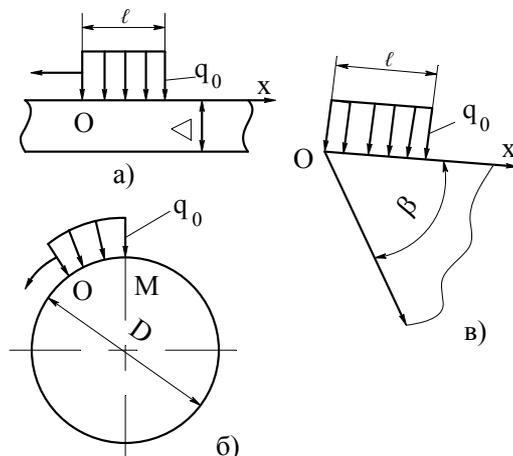


Рис. 7.3. Схематизация твердых тел при определении значений коэффициента  $A_T$ : а) для пластины; б) для цилиндра; в) для клина

Таблица 10

### Коэффициент $A_T$

| Символы |     | Диапазон значений  | $A_T^{cp}$   | $A_T^{max}$               |
|---------|-----|--------------------|--|---------------------------|
| $C$     | $T$ |                    |  |                           |
| 2       | 2   | $0,1 < u_1 < 1,6$  | $2,14 \cdot u_1^{-0,35}$   | $2,36 \cdot u_1^{-0,35}$  |
|         |     | $u_1 > 1,6$        | 2,0  | 2,0                       |
| 2       | 7   | $20 < u_1 < 12000$ | $2,78 \cdot u_1^{-0,045}$  | $3,06 \cdot u_1^{-0,045}$ |
|         |     | $u_1 > 12000$      | 2,0  | 2,0                       |
| 0       | 8   | $45 < \beta < 120$ | $A_T^{cp} = A_T^{max} = \frac{630 \cdot \text{erf} \cdot (0,08 \eta)}{\beta^{0,85}}$ |                           |

### 3.7.2. Методика расчета температур на контактных площадках стержней

Если источник расположен перпендикулярно оси стержня или под некоторым углом  $\Phi$  к ней и перемещается внутри стержня (рис. 7.4), то вместо алгоритма, показанного на рис. 7.1, используют алгоритм приведенный на рис. 7.5 [4]. Структура формулы для расчета температур в стержне имеет более простой вид, чем выражение (7.1):

$$\theta = A_M \cdot A_C \cdot A_D \cdot A_Y \cdot A_T. \quad (7.8)$$

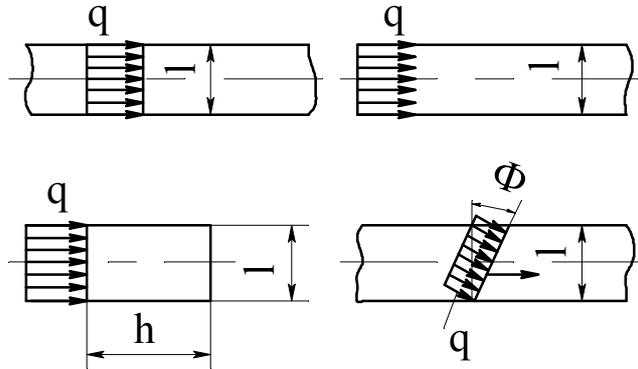


Рис. 7.4. Расположение источников теплоты в стержне

Для равномерно распределенных плоских источников, действующих в стержне, включая и движущиеся под углом  $\Phi \leq 30^\circ$ , средняя и наибольшая температуры на контактной площадке практически совпадают. Поэтому нет необходимости различать коэффициенты  $A^{cp}$  и  $A^{max}$ .

Первый множитель в формуле (7.8) определяется по уравнению (7.2):

Второй множитель  $A_C$  характеризует скорость перемещения источника. Для быстродвижущихся источников ( $C = 2$ ):

$$A_C = \frac{1}{Pe}, \quad (7.9)$$

где  $Pe$ - критерий Пекле ( $Pe \geq 10$ ).

Для неподвижных источников ( $C = 0$ )  $A_C = 1$ .

Коэффициент  $A_D$  учитывает длительность функционирования источника. При неустановившемся теплообмене ( $D = 1$ ):

$$A_D = \sqrt{\frac{Fo}{\pi}}. \quad (7.10)$$

Для установившегося процесса ( $D = 2$ ) коэффициент  $A_D = 1$ .

Коэффициент  $A_Y$  учитывает род граничных условий. При граничных условиях второго рода  $A_Y = 1$ . При граничных условиях третьего рода передачу теплоты в охлаждающую жидкость учитывают коэффициентом:

$$A_Y = \sqrt{\frac{S \cdot \lambda}{2 \cdot \ell \cdot \alpha \cdot P}} \quad (7.11)$$

где  $S$  – площадь охлаждаемой поверхности стержня,  $m^2$ ;

$\alpha$  – коэффициент теплоотдачи с боковой поверхности стержня,  $Вт/(m^2 \cdot K)$ ;

$P$  – периметр поперечного сечения стержня,  $m$ .

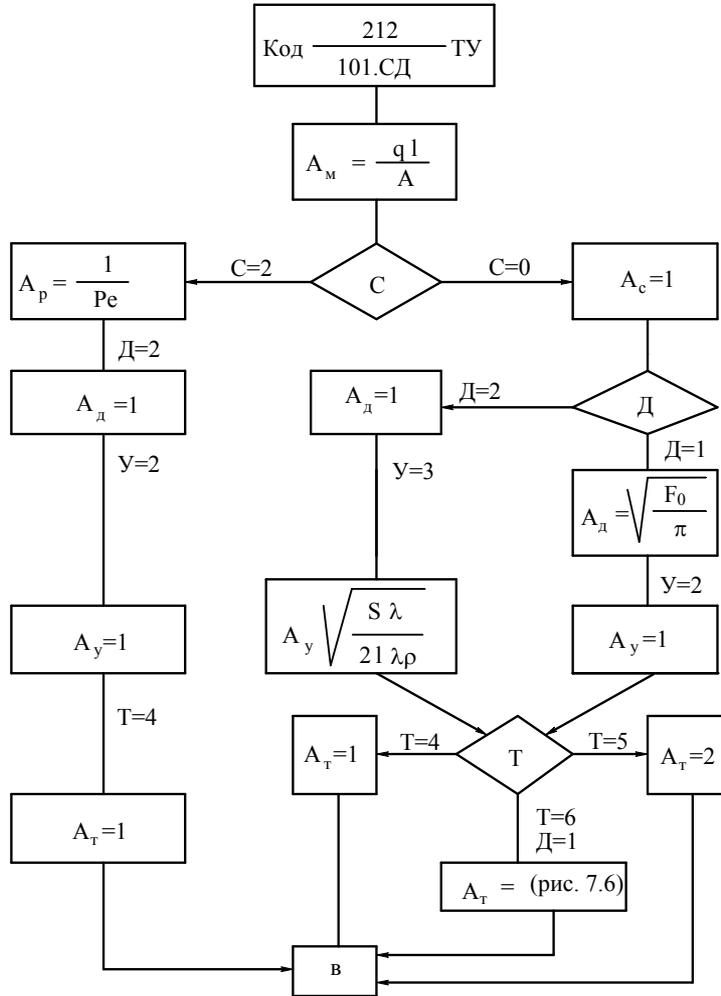


Рис. 7.5. Алгоритм расчета температур на контактных площадках стержней

Длину стержня учитывает коэффициент  $A_T$ , для неограниченного стержня  $A_T = 1$ , а для полубесконечного  $A_T = 2$ . Для стержня ограниченной длины  $h$  значения  $A_T$  приведены на рис. 7.6 в зависимости от безразмерного критерия:

$$Fo_h = a \cdot \frac{\tau}{h^2}, \quad (7.12)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;

$\tau$  – время функционирования источника, с.

Эти значения  $A_T$  справедливы для неустановившегося процесса.

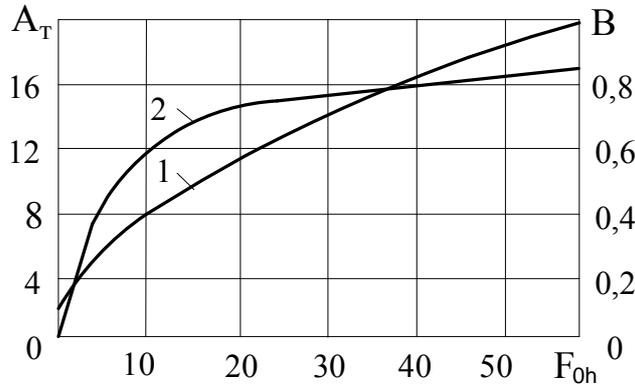


Рис. 7.6. Значения коэффициента  $A_T$  в формуле (7.9)

### 3.7.3. Взаимное влияние источников

Вопрос о взаимном влиянии источников возникает тогда, когда необходимо установить, как влияет теплота, внесенная одним из источников, на температуру площадки, занятой другим источником или стоком теплоты [4].

Рассмотрим взаимное влияние источников на примере задачи о двух полосовых быстродвижущихся источниках (рис. 7.7).

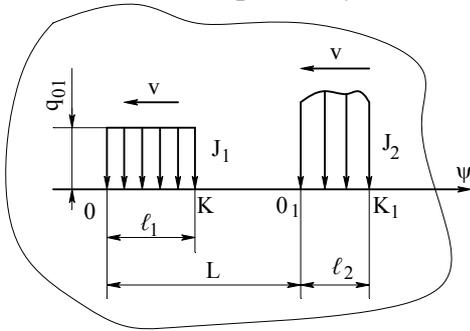


Рис. 7.7. Быстродвижущиеся источники теплоты на поверхности полупространства

Теплота, вносимая источником  $J_2$  через площадку  $O_1K_1$ , не влияет на температуру площадки  $OK$  под источником  $J_1$ , поскольку теплота впереди источника  $J_2$  не распространяется. А источник  $J_2$  влияет на температуру площадки  $O_1K_1$ . Если плотность тепловыделения источника  $J_1$  распределена равномерно, то функция, описывающая распределение температур при  $\psi \geq 1$  (см. уравнение (4.37)) имеет вид:

$$T_1 = \sqrt{\psi} - \sqrt{\psi - 1}, \quad (7.13)$$

где  $\psi = \frac{x}{\ell_1}$  – безразмерная абсцисса.

При расстоянии между источниками, равном  $L$ , положение площадки  $O_1K_1$  описывается безразмерными абсциссами:

$$\psi_1 = \frac{L}{\ell_1} \quad \text{и} \quad \psi_2 = \frac{(L + \ell_2)}{\ell_1}. \quad (7.14)$$

Среднее значение функции на участке  $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_2$ :

$$T_1 \cdot (\psi_1 \leq \psi \leq \psi_2) = \frac{I}{\psi_1 - \psi_2} \cdot \left( \int_{\psi_2}^{\psi_1} \sqrt{\psi} - \sqrt{\psi - I} \right) \cdot d\psi =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\psi_2^{3/2} - \psi_1^{3/2} - (\psi_2 - I)^{3/2} + (\psi_1 - I)^{3/2}}{\psi_2 - \psi_1}.$$

В пределах площадки длиной  $\ell_1$  функция  $T_1(\psi)$  имеет среднее значение  $T_1 \cdot (0 \leq \psi \leq I) = \frac{2}{3}$ , что соответствует среднему значению безразмерной температуры. Отношение:

$$B_{cp} = \frac{T_1 \cdot (\psi_1 \leq \psi \leq \psi_2)}{T_1 \cdot (0 \leq \psi \leq I)}, \quad (7.15)$$

условно назовем передаточной функцией, поскольку она показывает как температура, возникающая на площадке действия источника, «передается» на площадки, занимаемые другими источниками в том же теле. Можно считать, что:

$$T_1 \cdot (\psi_1 \leq \psi \leq \psi_2) \approx T_1 \cdot (\psi_{cp}), \quad (7.16)$$

где  $\psi_{cp} = 0,5 \cdot (\psi_1 + \psi_2)$  – безразмерная координата средней точки на интересующем участке нагреваемого тела.

Тогда:

$$B_{cp} = \frac{3}{2} \cdot \left( \sqrt{\psi_{cp}} - \sqrt{\psi_{cp} - I} \right). \quad (7.17)$$

Определив значение  $B_{cp}$  и по формуле (7.1) значение средней температуры  $\theta_{cp}$  на площадке, можно определить повышение температуры на площадке действия источника  $J_2$ , вызванное теплотой, выделяемой источником  $J_1$ .

$$\Delta\theta \cdot (\psi_{cp}) = \theta_{cp} \cdot B_{cp}. \quad (7.18)$$

### 3.7.4. Источники и стоки теплоты в технологической системе резания

Анализ теплофизической обстановки начинают с рассмотрения теплообмена в зоне резания при работе простым режущим клином, поскольку инструмент любой формы и сложности состоит из системы простых режущих клиньев.

Современное представление о процессе формоизменения материала может дать схема, приведенная на рис. 7.8. В зоне 3 материал заготовки подвергается пластическому деформированию, которое возникает не только в этой зоне, но и в тонком слое материала заготовки 1, расположенном под задней поверхностью режущего клина 5. Зона 3 окружена областью 2, в которой возникают упруго-пластические и упругие деформации.

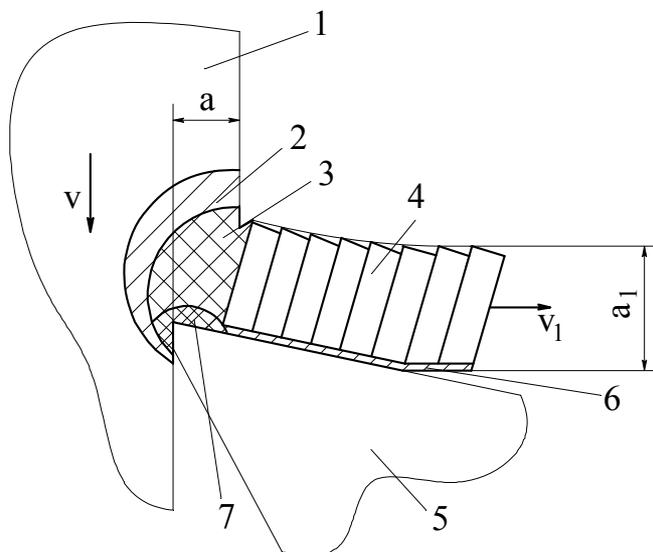


Рис. 7.8. Схема зоны резания

Стружка 4 перемещается по передней поверхности резца. В прирезцовом слое 6 ее материал испытывает вторичное деформирование вследствие процессов, происходящих на площадке контакта с инструментом. На участке, расположенном вблизи режущей кромки, может возникать нарост 7, как результат застойных явлений в материале заготовки в этой части зоны резания. Наличие или отсутствие нароста, его размеры, твердость и устойчивость зависят от свойств материала заготовки и инструмента, геометрии режущего клина, режима резания, наличия смазочно-охлаждающей жидкости. От этих же факторов зависит коэффициент укорочения стружки  $k$ , т. е. отношение между толщиной  $a_1$  стружки и толщиной  $a$  срезаемого слоя металла. Коэффициент укорочения определяет скорость перемещения стружки  $v_1 = v/k$ . Как правило,  $k > 1$ , следовательно, скорость движения стружки  $v_1$  меньше скорости резания  $v$ .

Стружка имеет суставчатую форму, т. е. состоит из отдельных элементов, сильнее или слабее связанных между собой. При высоких скоростях резания и обработке пластичных материалов толщина этих элементов невелика, они тесно связаны друг с другом, стружка имеет вид сплошной ленты. Такую стружку называют сливной. При схематизации теплообмена ее представляют в виде бесконечного стержня.

Общую мощность тепловыделения при резании полагают эквивалентной механической работе деформирования материала в зонах 2, 3 и 6 и работе сил трения на контактных поверхностях инструмента, т. е.:

$$W = P_z \cdot v, \quad (7.19)$$

где  $P_z$  – главная составляющая силы резания, Н;

$v$  – скорость резания, м/с.

В свою очередь:

$$W = W_D + W_{IT} + W_{2T}, \quad (7.20)$$

где  $W_D$  – мощность тепловыделения источника, возникающего как результат перехода в теплоту работы деформирования, Вт;

$W_{IT}$  – мощность тепловыделения источника, возникающего как результат перехода в теплоту работы сил трения на передней поверхности резца, Вт;

$W_{2T}$  – мощность тепловыделения источника, возникающего как результат перехода в теплоту работы сил трения на задней поверхности резца, Вт.

Все источники тепловыделения при резании являются трехмерными, но часто при теплофизическом анализе их полагают двумерными (плоскими). Учет трехмерности источников приводит к усложнению математического аппарата, используемого при теплофизическом анализе процесса резания, которое пока не окупается повышением точности расчетов. При высоких скоростях обработки форма источников тепловыделения стремится к двумерным фигурам. Например, конфигурация зоны деформирования 3 (рис. 7.8) стремится к двумерной поверхности, мало отличающейся от плоскости, которую называют плоскостью сдвига.

На основании изложенных соображений в дальнейшем источники тепловыделения при резании будем считать двумерными, распределенными по тому или иному участку поверхности резца, стружки или заготовки.

В соответствии с законами механики мощности теплообразующих источников рассчитывают по формулам:

$$\begin{cases} W_{IT} = F_1 \cdot v_1; \\ W_{2T} = F_2 \cdot v; \\ W_D = (P_z - F_2) \cdot v - F_1 \cdot v_1 \end{cases}, \quad (7.21)$$

где  $F_1$  – сила трения на передней контактной поверхности инструмента, Н;

$F_2$  – сила трения на задней контактной поверхности инструмента, Н.

Главную составляющую силы резания  $P_z$ , находят по формуле [5]:

$$P_z = C_{p_z} \cdot t^{x_{p_z}} \cdot S^{y_{p_z}} \cdot v^{n_{p_z}} \cdot K_p, \quad (7.22)$$

где  $C_{p_z}$ ,  $x_{p_z}$ ,  $y_{p_z}$  и  $n_{p_z}$  – коэффициенты, зависящие от условий обработки;

$t$  – глубина резания, мм;

$S$  – подача, мм/об;

$v$  – скорость резания, м/мин;

$K_p$  – поправочный коэффициент.

Силу трения на передней контактной поверхности инструмента  $F_1$  определяют по формуле:

$$F_I = \frac{P_z \cdot \sin(\omega + \gamma)}{\cos \omega}, \quad (7.23)$$

где  $\omega$  – угол действия. Угол действия – это угол между действительным направлением силы резания и ее составляющей  $P_Z$ .

Угол действия находят по формуле [1]:

$$\omega = \arctg\left(\frac{P_Y}{P_Z}\right), \quad (7.24)$$

где  $P_Y$  – составляющая силы резания, Н.

Составляющую  $P_Y$  силы резания определяют по формуле:

$$P_Y = C_{P_Y} \cdot t^{y_{P_Y}} \cdot S^{y_{P_Y}} \cdot v^{n_{P_Y}} \cdot K_P, \quad (7.25)$$

где  $C_{P_Y}$ ,  $x_{P_Y}$ ,  $y_{P_Y}$  и  $n_{P_Y}$  – коэффициенты, зависящие от условий обработки.

Силу трения по задней контактной поверхности инструмента  $F_2$  определяют как силу  $P_Z$  при толщине срезаемого слоя, стремящейся к нулю[3].

Теплота  $W$ , распространяясь по технологической системе, расходуется на нагревание стружки ( $W_C$ ), инструмента ( $W_H$ ), заготовки ( $W_3$ ) и рассеивается в окружающую среду ( $W_O$ ). Поэтому:

$$W = W_C + W_H + W_3 + W_O. \quad (7.26)$$

Мощности  $W_D$ ,  $W_{IT}$  и  $W_{2T}$  при резании известны, а мощности  $W_C$ ,  $W_H$ ,  $W_3$  и  $W_O$  могут быть рассчитаны только с помощью теплофизического анализа.

### 3.7.5. Структурная схема теплообмена в зоне резания при точении

На рис. 7.9 приведена структурная схема теплообмена. Предположено, что в зоне резания нет искусственного охлаждения, а теплообменом компонентов системы с окружающей средой можно пренебречь.

В структурной схеме теплообмена сливная стружка представлена в виде бесконечного стержня. Правда, за пределами плоскости сдвига ON стержень-стружка не существует, его можно выделить из массы обрабатываемого материала лишь условно. В этой воображаемой части стержня условия теплоотдачи будут совсем иными, чем в реально существующей его части. Но при практически применяемых режимах резания скорости  $v_I$  перемещения стружки таковы, что все источники теплоты, действующие на ее поверхностях и в объеме, можно считать быстродвижущимися. Следовательно, теплота этих источников впереди них не распространяется. Поэтому условия теплообмена в воображаемой части стружки не могут влиять на результаты теплофизических расчетов. Источник плотностью  $q_d$ , возникающий на плоскости сдвига ON, принят распределенным равномерно. Он движется внутри стержня-стружки, располагаясь наклон-

но к оси стержня. Угол наклона:

$$\mu = \Phi - \gamma, \quad (7.27)$$

где  $\Phi$  – угол сдвига;

$\gamma$  – передний угол резца.

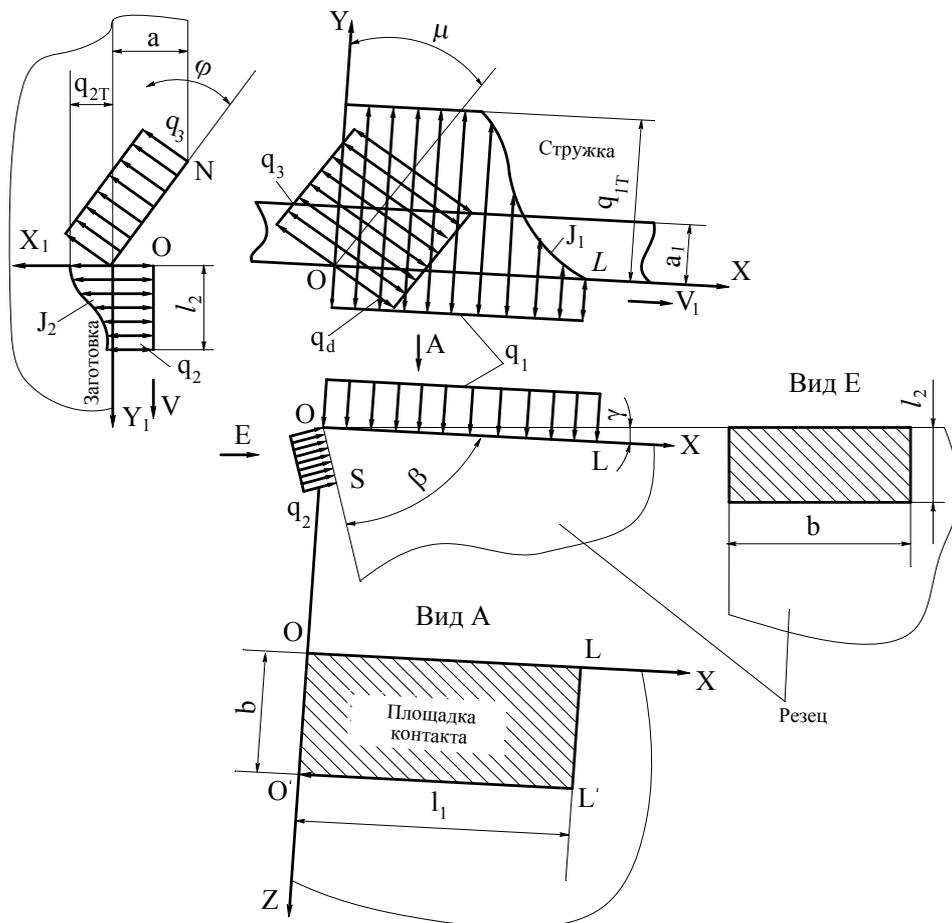


Рис. 7.9. Структурная схема теплообмена в зоне резания

Угол наклона оказывается, как правило, небольшим ( $\mu = 10 \dots 15^\circ$ ).

Плотность тепловыделения на поверхности сдвига:

$$q_d = W_d \cdot \frac{\sin \Phi}{a \cdot b}, \quad (7.28)$$

где  $a$  – толщина среза, м;

$b$  – ширина стружки, м.

Угол сдвига можно рассчитать по формуле [1]:

$$\sin \Phi = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{k^2 - 2k \cdot \sin \gamma + 1}}, \quad (7.29)$$

где  $k$  – коэффициент укорочения стружки.

Толщина среза при точении определяется по формуле [1]:

$$a = S \cdot \sin \varphi, \quad (7.30)$$

где  $S$  – подача, м/об;

$\varphi$  – главный угол в плане.

Ширина стружки мало отличается от ширины среза. Ее можно определить по формуле [1]:

$$b = \frac{t}{\sin \varphi}, \quad (7.31)$$

где  $t$  – глубина резания, м.

Длина контакта инструмента со стружкой определяем по формуле [1]:

$$\ell_1 = 2a \cdot [k \cdot (1 - \operatorname{tg} \gamma) + \sec \gamma]. \quad (7.32)$$

Распределение сил трения на поверхности контакта между стружкой и резцом наиболее удачно описывается комбинированным законом. Поэтому и плотность тепловыделения источника  $J_1$ , действующего на этом участке, принимается распределенной по комбинированному закону с кодом  $P = 801$ . При комбинированном законе распределения наибольшая плотность потока:

$$q_{1T} = \frac{3 \cdot W_{1T}}{(2 \cdot b \cdot \ell_1)}. \quad (7.33)$$

На температуру стружки оказывают непосредственное влияние два итоговых потока теплообмена:  $q_1$  с резцом и  $q_3$  с заготовкой. Распределение плотности этих стоков принимают равномерным.

Рассмотрим схему расположения источников и стоков теплоты относительно заготовки. Кроме упомянутого потока теплообмена  $q_3$ , на температуру заготовки влияют источник  $J_2$ , эквивалентный теплоте трения на задней поверхности резца, и итоговый поток теплообмена  $q_2$ . Источник  $J_2$  полагают распределенным по несимметричному нормальному закону, а итоговый поток теплообмена  $q_2$  принимают распределенным равномерно. За малостью размеров всех источников, действующих на поверхности заготовки, и в связи с небольшими значениями угла сдвига  $\Phi$  (обычно  $10^\circ \leq \Phi \leq 30^\circ$ ), заготовку заменяют полупространством, по которому быстро движутся источники  $J_2$  и  $q_3$ , а также сток  $q_2$ .

При несимметричном нормальному законе распределения источника  $J_2$  наибольшая плотность потока:

$$q_{2T} = \frac{2 \cdot W_{2T} \cdot \sqrt{k_0}}{b \cdot \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf} \left( l_2 \cdot \sqrt{k_0} \right)}, \quad (7.34)$$

где  $\operatorname{erf}(\chi)$  – функция ошибок;

$k_0$  – коэффициент, м<sup>-2</sup>;

$l_2$  – длина контакта задней поверхности резца с заготовкой, м.

Функция  $\operatorname{erf}(\chi)$  может быть аппроксимирована выражением:

$$\operatorname{erf}(\chi) = \sqrt{1 - \exp(-1,26 \cdot \chi^2)}. \quad (7.35)$$

Коэффициент  $k_0$  определяют по формуле:

$$k_0 = \frac{3}{\ell_2^2}. \quad (7.36)$$

Инструмент на рис. 7.9 представлен в виде неограниченного клина с углом  $\beta$  и углом между кромками  $OO'$  и  $OL$ , равным  $90^\circ$ . На поверхности режущего клина действуют плоские источники теплоты  $q_1$  и  $q_2$ , длина которых соответственно  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , а ширина  $b$ .

При составлении структурной схемы теплообмена в зоне резания не учтено влияние нароста на резце.

С учетом вышеизложенного можно получить формулы для расчета температур на контактных площадках тел.

Так температура на поверхности сдвига  $ON$  со стороны заготовки:

$$\theta_3^{cp} = (1+c) \cdot A_1 q_3, \quad (7.37)$$

а со стороны стружки:

$$\theta_3^{cp} = (1+c) \cdot A_2 \cdot (q_d - q_3), \quad (7.38)$$

где  $c$  – коэффициент, учитывающий повышение температуры, вызванное накоплением теплоты в поверхностных слоях материала заготовки при длительном резании;

$A_1, A_2$  – коэффициенты, которые определяются по методике, изложенной в п. 3.7.1. При этом учтено, что вследствие высокой скорости движения другие источники, кроме  $q_d$  и  $q_3$ , на температуру площадки  $ON$  не влияют. Значение коэффициента  $c$  для обычного течения невелико ( $c = 0,05 \dots 0,15$ ).

Выражения для расчета температур контактных площадок  $OL$  и  $OS$  со стороны стружки и заготовки имеют вид:

$$\theta_1^{cp} = A_3 q_{1T} + (1+c) A_2 (q_d - q_3) - A_4 q_1; \quad (7.39)$$

$$\theta_2^{cp} = A_5 q_{2T} + (1+c) A_6 q_3 - A_7 q_2, \quad (7.40)$$

где  $A_2 - A_7$  – коэффициенты, которые рассчитывают с помощью алгоритмов, показанных на рис. 7.1 и 7.5, и относящихся к ним таблиц и рисунков. При этом коэффициент  $A_2$  имеет одинаковое значение в формулах (7.41) и (7.42), поскольку температура  $\theta_3^{cp}$ , вызванная теплотой деформирования, имеет одно и то же значение по всей длине стружки. Дело в том, что каждый из элементов стружки, получив в процессе деформирования у плоскости  $ON$  какое-то количество теплоты, перемещается далее среди других таких же элементов, сколовшихся ранее или позднее. Каждый из этих элементов был нагрет до температуры  $\theta_3^{cp}$  в тот момент, когда он подвергался деформированию. Поскольку отдачи теплоты в ок-

ружающую среду от стружки практически нет, нет притока теплоты от других источников, то нет и теплообмена между элементами стружки. Следовательно, в любом месте стружки, в том числе и на контактной площадке с резцом, температура  $\theta_3^{cp}$ , вызванная теплотой деформирования металла, должна быть одной и той же.

Когда учитывается влияние теплоты деформирования на температуру  $\theta_2^{cp}$  на площадке контакта заготовки с резцом, коэффициент  $A_6$  отличается от коэффициента  $A_1$ . Это объясняется тем, что источник плотности  $q_3$  воздействует на температуру  $\theta_2^{cp}$  не непосредственно, а косвенно, только в порядке взаимного влияния источника  $q_3$  на температуру площадки  $\ell_2$ , расположенной под источником  $J_2$ .

Коэффициент  $A_6$  считают по формуле:

$$A_6 = A_1 \cdot B_{cp}, \quad (7.41)$$

где  $B_{cp}$  – передаточная функция (формула 7.20).

Температуру контактных площадок  $OL$  и  $OS$  со стороны резца рассчитывают по формулам:

$$\theta_1^{cp} = C_{11} q_1 + C_{21} q_2; \quad (7.42)$$

$$\theta_2^{cp} = C_{22} q_2 + C_{12} q_1, \quad (7.43)$$

где  $C_{11}$  – коэффициент, учитывающий влияние источника  $q_1$  на температуру передней поверхности инструмента;

$C_{21}$  – коэффициент, учитывающий влияние источника  $q_2$  на температуру передней поверхности инструмента;

$C_{22}$  – коэффициент, учитывающий влияние источника  $q_2$  на температуру задней поверхности инструмента;

$C_{12}$  – коэффициент, учитывающий влияние источника  $q_1$  на температуру задней поверхности инструмента.

Коэффициенты  $C_{11}$  и  $C_{22}$  определяются с помощью алгоритма, показанного на рис. 7.1. Коэффициенты  $C_{21}$  и  $C_{12}$  отображают взаимное влияние источников. Для установившегося теплообмена их определяют по формулам:

$$C_{12} = \ell_1 \cdot \frac{N_1}{\lambda}; \quad (7.44)$$

$$C_{21} = \ell_2 \cdot \frac{N_2}{\lambda}, \quad (7.45)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала клина,  $Вт/(м \cdot ^\circ C)$ ;

$\ell_1$  и  $\ell_2$  – длины контактных площадок, м;

$N_1$  и  $N_2$  – функции.

Значения функций  $N_1 = f(\eta_1, \beta, \alpha_2)$  и  $N_2 = f(\eta_2, \beta, \alpha_1)$  определяют по рис. 7.10. Функции  $N_1, N_2$  зависят от угла заострения  $\beta$  резца, безразмер-

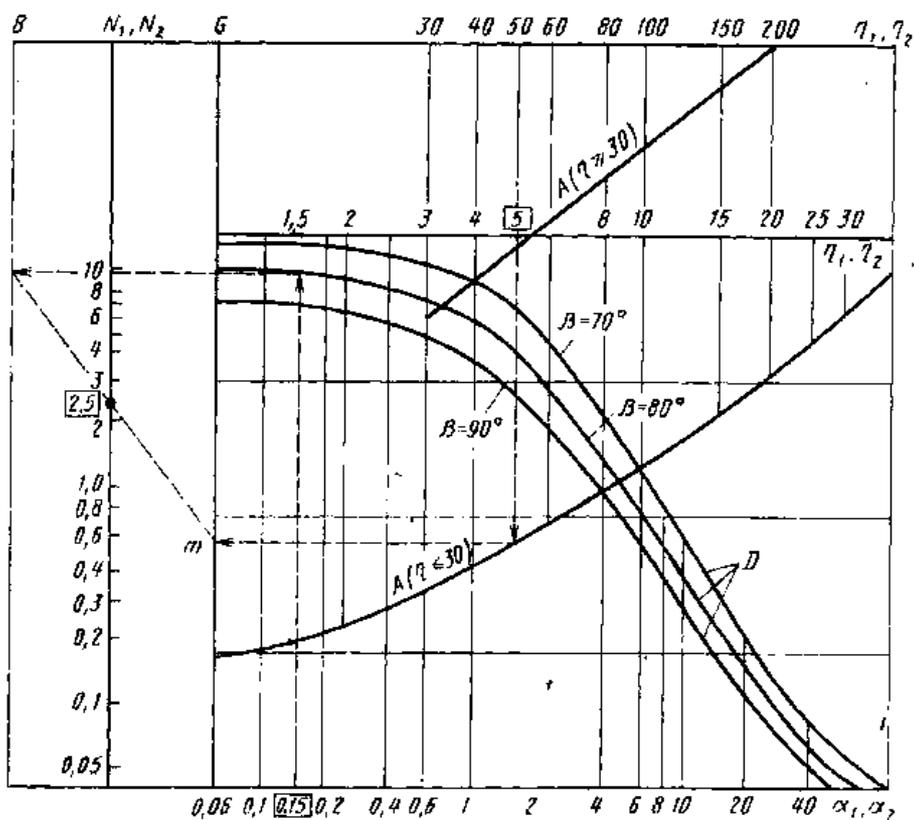


Рис. 7.10. Номограмма для расчета функций  $N_1$  и  $N_2$ , используемых при расчете температур на поверхностях резца [4].

ной ширины контактных площадок  $\eta_1 = \frac{b}{l_1}$  и  $\eta_2 = \frac{b}{l_2}$ , а также соотно-

шений  $\alpha_1 = \frac{l_1}{l_2}$  и  $\alpha_2 = \frac{l_2}{l_1}$  между длинами контактных площадок.

Сопоставляя попарно формулы (7.37) и (7.38), (7.39) и (7.42), (7.40) и (7.43), получим уравнения баланса средних температур на контактных поверхностях инструмента. Решая эти уравнения, можно рассчитать плотности и направления итоговых потоков теплообмена  $q_1, q_2$  и  $q_3$ .

Плотность итогового потока теплообмена  $q_3$  находят по формуле:

$$q_3 = \frac{A_2 \cdot q_d}{A_1 + A_2}. \quad (7.46)$$

Плотности итоговых потоков теплообмена  $q_1$  и  $q_2$  находят при решении уравнений баланса температур на контактных площадках резца.

Определив плотности и направление итоговых потоков, можно рассчитать средние температуры на поверхностях инструмента. Удобным показателем термической напряженности процесса резания является температура резания, под которой понимают среднюю температуру по всей поверхности соприкосновения инструмента с обрабатываемой заготовкой и стружкой:

$$\theta = \frac{(\theta_1^{cp} \cdot \ell_1 + \theta_2^{cp} \cdot \ell_2)}{\ell_1 + \ell_2}. \quad (7.47)$$

#### 4. АЛГОРИТМ И ПРИМЕР РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРЫ РЕЗАНИЯ ПРИ ТОЧЕНИИ

##### 4.1. Алгоритм расчета температуры резания при точении

Алгоритм расчета температуры резания при точении следующий [4]:

- 1) по формулам (7.21) рассчитываем мощности источников тепловыделения;
- 2) по формуле (7.29) рассчитываем значение угла сдвига  $\Phi$ ;
- 3) составляем код источника  $q_3$  и рассчитываем коэффициент  $A_1$ , пользуясь алгоритмом, изображенным на рис. 7.1;
- 4) составляем код источника ( $q_{\alpha}-q_3$ ) и рассчитываем коэффициент  $A_2$ , пользуясь алгоритмом, изображенным на рис. 7.5;
- 5) по формуле (7.46) рассчитываем плотность итогового потока  $q_3$ ;
- 6) составляем код источника  $q_{1T}$  и рассчитываем коэффициент  $A_3$ , пользуясь алгоритмом, изображенным на рис. 7.1;
- 7) составляем код стока  $q_1$  и рассчитываем коэффициент  $A_4$ , пользуясь алгоритмом, изображенным на рис. 7.1;
- 8) составляем код источника  $q_{2T}$  и рассчитываем коэффициент  $A_5$ , пользуясь алгоритмом, изображенным на рис. 7.1;
- 9) составляем код стока  $q_2$  и рассчитываем коэффициент  $A_7$ , пользуясь алгоритмом, изображенным на рис. 7.1;
- 10) рассчитываем передаточную функцию  $B_{cp}$ , характеризующую влияние источника  $q_3$  на температуру площадки  $\ell_2$  по формуле (7.16);
- 11) рассчитываем значение коэффициента  $A_6$  по формуле (7.41);
- 12) составляем код источника  $q_1$  и рассчитываем коэффициент  $C_{11}$ , пользуясь алгоритмом, изображенным на рис. 7.1;
- 13) составляем код источника  $q_2$  и рассчитываем коэффициент  $C_{22}$ , пользуясь алгоритмом, изображенным на рис. 7.1;

14) определяем значение  $N_1$  по графику (рис. 7.10) и передаточную функцию  $C_{21}$ ;

15) определяем значение  $N_2$  по графику (рис. 7.10) и передаточную функцию  $C_{12}$ ;

16) составляем уравнения баланса температур на контактных площадках резца и рассчитываем плотности итоговых потоков теплообмена  $q_1$  и  $q_2$ ;

17) рассчитываем средние температуры на контактных площадках резца  $\theta_1$  и  $\theta_2$

18) по формуле (7.47) рассчитываем температуру резания  $\theta$ .

## 4.2. Пример расчета

Определить температуру резания при точении заготовки из стали 40ХН резцом с пластиной из твердого сплава Т15К6. Режим резания: подача  $S = 0,8 \cdot 10^{-3}$  м/об, глубина резания  $t = 5 \cdot 10^{-3}$  м, скорость резания  $v = 1,3$  м/с. Силы резания  $P_Z = 8400$  Н,  $P_Y = 3600$  Н. Геометрические параметры инструмента: передний угол  $\gamma = 12^\circ$ , задний угол  $\alpha = 10^\circ$ , угол в плане  $\varphi = 45^\circ$ . Коэффициент теплопроводности стали 40ХН

$\lambda_1 = 33,9 \cdot \frac{Вт}{м \cdot К}$ , твердого сплава Т15К6  $\lambda_2 = 27,2 \cdot \frac{Вт}{м \cdot К}$ . Коэффициент температуропроводности стали 40ХН  $a_1 = 0,067 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с, твердого сплава  $a_2 = 0,1 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с.

Принимаем коэффициент усадки стружки  $k = 1,8$ , длину контакта  $\ell_2 = 0,1 \cdot 10^{-3}$  м.

### Решение.

Определим необходимые для расчета исходные данные:

- ширина стружки  $b = \frac{t}{\sin \varphi} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{\sin 45^\circ} = 7,07 \cdot 10^{-3}$  м;
- толщина среза  $a = S \cdot \sin \varphi = 0,8 \cdot 10^{-3} \cdot \sin 45^\circ = 5,7 \cdot 10^{-4}$  м;
- длина контакта инструмента со стружкой  
 $\ell_1 = 2a \cdot [k \cdot (1 - \operatorname{tg} \gamma) + \sec \gamma] = 2 \cdot 5,7 \cdot 10^{-4} \cdot [1,8 \cdot (1 - \operatorname{tg} 12^\circ) + \sec 12^\circ] = 2,66 \cdot 10^{-3}$  м;
- угол действия  $\omega = \operatorname{arctg} \frac{P_y}{P_z} = \operatorname{arctg} \frac{3600}{8400} = 24^\circ$ ;
- сила трения на передней контактной поверхности резца  
$$F_1 = \frac{P_z \cdot \sin (24 + 12)}{\cos 24} = 5187 \text{ Н};$$
- сила трения по задней контактной поверхности резца

$$F_2 = P_z \cdot (t = 0,1 \text{ мм}) = 64 \text{ Н.}$$

1) Рассчитаем мощности источников тепловыделения.

$$\text{Скорость схода стружки } v_1 = \frac{v}{k} = \frac{1,3}{1,8} = 0,72 \text{ м/с}$$

Мощность тепловыделения от силы трения на передней поверхности резца  $W_{1T} = F_1 \cdot v_1 = 5187 \cdot 0,72 = 3746 \text{ Вт.}$

Мощность тепловыделения от силы трения на задней поверхности резца  $W_{2T} = F_2 \cdot v = 64 \cdot 1,3 = 83,2 \text{ Вт.}$

Мощность тепловыделения при деформировании металла

$$W_D = (P_z - F_2) \cdot v - F_1 \cdot v_1 = (8400 - 64) \cdot 1,3 - 5187 \cdot 0,72 = 6624 \text{ Вт.}$$

2) Рассчитаем значение угла сдвига:

$$\Phi = \arcsin \left( \frac{\cos \gamma}{\sqrt{k^2 - 2k \cdot \sin \gamma + 1}} \right) = \arcsin \left( \frac{\cos 12^\circ}{\sqrt{1,8^2 - 2 \cdot 1,8 \cdot \sin 12^\circ + 1}} \right) = 31,6^\circ.$$

3) Рассчитаем наибольшие плотности теплообразующих потоков:

$$k_0 = \frac{3}{\ell_2^2} = \frac{3}{(10^{-4})^2} = 3 \cdot 10^8;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(\ell_2 \cdot \sqrt{k_0}) &= \operatorname{erf}(10^{-4} \cdot \sqrt{3 \cdot 10^8}) = \\ &= \operatorname{erf}(1,732) = \sqrt{1 - \exp(-1,26 \cdot 1,732^2)} = 0,986; \end{aligned}$$

$$q_{2T} = \frac{2W_{2T} \cdot \sqrt{k_0}}{b\sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(\ell_2 \cdot \sqrt{k_0})} = \frac{2 \cdot 83,2 \cdot \sqrt{3 \cdot 10^8}}{7,07 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(1,732)} = 2,34 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2;$$

$$q_d = \frac{W_D \cdot \sin \Phi}{a \cdot b} = \frac{6624 \cdot \sin 31,6^\circ}{5,7 \cdot 10^{-4} \cdot 7,07 \cdot 10^{-3}} = 8,67 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2;$$

$$q_{1T} = \frac{3W_{1T}}{2b \cdot \ell_1} = \frac{3 \cdot 3746}{2 \cdot 7,07 \cdot 10^{-3} \cdot 2,66 \cdot 10^{-3}} = 2,99 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2.$$

4) Составим код источника  $q_3$  длиной

$$\ell_3 = \frac{a}{\sin \Phi} = \frac{5,7 \cdot 10^{-4}}{\sin 31,6^\circ} = 1,08 \cdot 10^{-3} \text{ м, который движется по заготовке со}$$

скоростью  $v$ : код =  $+\frac{212}{101,22} \cdot 12$ . Пользуясь алгоритмом (рис. 7.1), рас-

считаем коэффициент  $A_1$ :

$$A_M = \frac{\ell_3 \cdot q_3}{\lambda_1} = \frac{1,08 \cdot 10^{-3} \cdot q_3}{33,9} = 3,19 \cdot 10^{-5} \cdot q_3.$$

$$\text{Критерий Пекле } Pe = \frac{v \cdot \ell_3}{a_1} = \frac{1,3 \cdot 1,08 \cdot 10^{-3}}{0,067 \cdot 10^{-4}} = 209,7 ;$$

$$A_C = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot Pe}} = \frac{1}{\sqrt{3,14 \cdot 209,7}} = 0,039 ;$$

$$A_P = 0,67; \quad A_D = 1; \quad A_K = 1;$$

$$\eta_o = \frac{b}{2 \cdot \ell_3} = \frac{7,07 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 1,08 \cdot 10^{-3}} = 3,27 ;$$

$$u = 2 \cdot \eta_o \cdot \sqrt{Pe} = 2 \cdot 3,27 \cdot \sqrt{209,7} = 94,7 .$$

По рис. 7.2 при  $u = 94,7$  находим  $A_0 = 0,9$ ;  $A_T = 2$ ;

$$\begin{aligned} A_I &= \frac{A_M}{q_3} A_C \cdot A_P \cdot A_D \cdot A_K \cdot A_0 \cdot A_m = \\ &= \frac{3,19 \cdot 10^{-5} \cdot q_3}{q_3} 0,039 \cdot 0,67 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,9 \cdot 2 = 1,5 \cdot 10^{-6} . \end{aligned}$$

5) Составим код источника  $q_d - q_3$ , который движется внутри стружки (стержня) со скоростью  $v_I$ : код =  $+\frac{212}{101,22} 42$ . Пользуясь алгоритмом (рис. 7.1), рассчитаем коэффициент  $A_2$ :

$$A_M = \frac{\ell_3 \cdot (q_d - q_3)}{\lambda_1} = \frac{1,08 \cdot 10^{-3} \cdot (q_d - q_3)}{33,9} = 3,19 \cdot 10^{-5} \cdot q_3 .$$

$$\text{Критерий Пекле } Pe = \frac{v_I \cdot \ell_3}{a_1} = \frac{0,72 \cdot 1,08 \cdot 10^{-3}}{0,067 \cdot 10^{-4}} = 116,5 .$$

$$A_C = \frac{1}{Pe} = \frac{1}{116,5} = 0,0086 ;$$

$$A_D = 1; \quad A_Y = 1; \quad A_m = 1;$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{A_M}{q_d - q_3} \cdot A_C \cdot A_D \cdot A_Y \cdot A_m = \\ &= \frac{3,19 \cdot 10^{-5} \cdot (q_d - q_3)}{q_d - q_3} 0,0086 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2,74 \cdot 10^{-7} . \end{aligned}$$

6) Рассчитаем плотность потока:

$$q_3 = \frac{A_2}{A_I + A_2} q_d = \frac{2,74 \cdot 10^{-7}}{1,5 \cdot 10^{-6} + 2,74 \cdot 10^{-7}} 8,67 \cdot 10^8 = 1,3 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2 .$$

7) Составим код источника  $q_{IT}$ . Пользуясь алгоритмом (рис. 7.5), рассчитаем коэффициент  $A_3$ . При составлении кода имеем ввиду, что в

следствие адиабатичности боковых сторон стружки последнюю можно представить в виде неограниченной пластины толщиной  $t_1 = k \cdot a = 1,8 \times 5,7 \cdot 10^{-4} = 1,02 \cdot 10^{-3}$  м, а источник  $q_{IT}$  в виде двумерного полосового, ограниченного только по длине  $\ell_1$ . Коэффициент  $c = 0,1$ . Код =  $+\frac{212}{801,22} 22$ ;

$$A_M = \frac{\ell_1 \cdot q_{IT}}{\lambda_1} = \frac{2,66 \cdot 10^{-3} \cdot q_{IT}}{33,9} = 7,85 \cdot 10^{-5} \cdot q_{IT}.$$

$$\text{Критерий Пекле } Pe = \frac{v_1 \cdot \ell_1}{a_1} = \frac{0,72 \cdot 2,66 \cdot 10^{-3}}{0,067 \cdot 10^{-4}} = 286,9;$$

$$A_C = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot Pe}} = \frac{1}{\sqrt{3,14 \cdot 286,9}} = 0,033;$$

$$A_p = 0,51; \quad A_D = 1; \quad A_K = 1;$$

$$\eta_o = \frac{b}{2 \cdot \ell_1} = \frac{7,07 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2,66 \cdot 10^{-3}} = 1,33;$$

$$u = 2 \cdot \eta_o \cdot \sqrt{Pe} = 2 \cdot 1,33 \cdot \sqrt{286,9} = 45.$$

По рис. 7.2 при  $u = 45$  находим  $A_0 = 0,89$ ;  $A_T = 2$ ;

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{A_M}{q_{IT}} A_c \cdot A_p \cdot A_D \cdot A_K \cdot A_o \cdot A_m = \\ &= \frac{7,85 \cdot 10^{-5} \cdot q_{IT}}{q_{IT}} 0,033 \cdot 0,51 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,89 \cdot 2 = 2,38 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

8) Составим код стока  $q_1$ . Пользуясь алгоритмом (рис. 7.1), рассчитаем коэффициент  $A_4$ . При составлении кода имеем ввиду, что вследствие адиабатичности боковых сторон стружки, последнюю можно представить в виде неограниченной пластины толщиной  $t_1 = k \cdot a = 1,8 \cdot 5,7 \cdot 10^{-4} = 1,02 \cdot 10^{-3}$  м, а сток  $q_1$  в виде двумерного полосового, ограниченного только по длине  $\ell_1$ . Коэффициент  $c = 0,1$ . Код =  $-\frac{211}{101,22} 22$ ;

$$A_M = \frac{\ell_1 \cdot q_1}{\lambda_1} = \frac{2,66 \cdot 10^{-3} \cdot q_1}{33,9} = 7,85 \cdot 10^{-5} \cdot q_1.$$

$$\text{Критерий Пекле } Pe = \frac{v_1 \cdot \ell_1}{a_1} = \frac{0,72 \cdot 2,66 \cdot 10^{-3}}{0,067 \cdot 10^{-4}} = 286,9;$$

$$A_C = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot Pe}} = \frac{1}{\sqrt{3,14 \cdot 286,9}} = 0,033;$$

$$A_p = 0,67; \quad A_d = 1; \quad A_k = 1;$$

$$\eta_o = \frac{b}{2 \cdot \ell_1} = \frac{7,07 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2,66 \cdot 10^{-3}} = 1,33;$$

$$u = 2 \cdot \eta_o \cdot \sqrt{Pe} = 2 \cdot 1,33 \cdot \sqrt{286,9} = 45.$$

По рис. 7.2 при  $u = 45$  находим  $A_0 = 0,89$ ,  $A_m = 2$ ;

$$A_4 = \frac{A_M}{q_1} \cdot A_c \cdot A_p \cdot A_d \cdot A_k \cdot A_o \cdot A_m =$$

$$= \frac{7,85 \cdot 10^{-5} \cdot q_1}{q_1} \cdot 0,033 \cdot 0,67 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,89 \cdot 2 = 3,13 \cdot 10^{-6}.$$

9) Составим код источника  $q_{2T}$  и по алгоритму (рис. 7.1), рассчитаем коэффициент  $A_5$ . Код =  $+\frac{212}{501,22} 12$ :

$$A_M = \frac{\ell_2 \cdot q_{2T}}{\lambda_1} = \frac{0,1 \cdot 10^{-3} \cdot q_{2T}}{33,9} = 2,95 \cdot 10^{-6} \cdot q_{2T}.$$

Критерий Пекле  $Pe = \frac{v \cdot \ell_2}{a_1} = \frac{1,3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}}{0,067 \cdot 10^{-4}} = 19,4$ ;

$$A_C = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot Pe}} = \frac{1}{\sqrt{3,14 \cdot 19,4}} = 0,128;$$

$$A_p = 0,36; \quad A_d = 1; \quad A_K = 1;$$

$$\eta_o = \frac{b}{2 \cdot \ell_2} = \frac{7,07 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}} = 35,36;$$

$$u = 2\eta_o \cdot \sqrt{Pe} = 2 \cdot 35,36 \cdot \sqrt{19,4} = 311.$$

По рис. 7.2 при  $u = 311$  находим  $A_0 = 0,92$ ,  $A_m = 2$ ;

$$A_5 = \frac{A_M}{q_{2T}} \cdot A_c \cdot A_p \cdot A_d \cdot A_k \cdot A_o \cdot A_m =$$

$$= \frac{2,95 \cdot 10^{-6} \cdot q_{2T}}{q_{2T}} \cdot 0,128 \cdot 0,36 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,92 \cdot 2 = 2,5 \cdot 10^{-7}.$$

10) Составим код стока  $q_2$  и по алгоритму (рис. 7.1), рассчитаем коэффициент  $A_7$ . Код =  $-\frac{212}{101,22} 12$ :

$$A_M = \frac{\ell_2 \cdot q_2}{\lambda_1} = \frac{0,1 \cdot 10^{-3} \cdot q_2}{33,9} = 2,95 \cdot 10^{-6} \cdot q_2.$$

$$\text{Критерий Пекле } Pe = \frac{v \cdot \ell_2}{a_1} = \frac{1,3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}}{0,067 \cdot 10^{-4}} = 19,4;$$

$$A_C = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot Pe}} = \frac{1}{\sqrt{3,14 \cdot 19,4}} = 0,128;$$

$$A_p = 0,67; \quad A_o = 1; \quad A_k = 1;$$

$$\eta_o = \frac{b}{2 \cdot \ell_2} = \frac{7,07 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}} = 35,36;$$

$$u = 2 \cdot \eta_o \cdot \sqrt{Pe} = 2 \cdot 35,36 \cdot \sqrt{19,4} = 311.$$

По рис. 7.2 при  $u = 311$  находим  $A_0, A_T = 2$ ;

$$\begin{aligned} A_7 &= \frac{A_M}{q_2} \cdot A_C \cdot A_p \cdot A_o \cdot A_k \cdot A_o \cdot A_m = \\ &= \frac{2,95 \cdot 10^{-6} \cdot q_{2T}}{q_{2T}} \cdot 0,128 \cdot 0,67 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,92 \cdot 2 = 4,66 \cdot 10^{-7}. \end{aligned}$$

11) Рассчитаем передаточную функцию, характеризующую влияние источника  $q_3$  на температуру площадки  $l_2$ :

$$\varphi_1 = 1;$$

$$\psi_2 = \frac{\ell_3 + \ell_2}{\ell_3} = \frac{1,08 \cdot 10^{-3} + 0,1 \cdot 10^{-3}}{1,08 \cdot 10^{-3}} = 1,093;$$

$$\psi_{cp} = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} = \frac{1 + 1,093}{2} = 1,046;$$

$$B_{cp} = \frac{3}{2} \cdot (\sqrt{\psi_{cp}} - \sqrt{\psi_{cp} - 1}) = \frac{3}{2} \cdot (\sqrt{1,046} - \sqrt{1,046 - 1}) = 1,212.$$

12) Рассчитываем значение коэффициента  $A_6$ :

$$A_6 = A_1 \cdot B_{cp} = 1,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1,212 = 1,82 \cdot 10^{-6}.$$

13) Напишем выражение для температур  $\theta_1$  и  $\theta_2$  со стороны заготовки:

$$\theta_1 = A_3 \cdot q_{1T} + (1+c) \cdot A_2 \cdot (q_d + q_3) - A_4 \cdot q_1 = 2,38 \cdot 10^{-6} \cdot 2,99 \cdot 10^8 + (1 + 0,1) \times \\ \times x \cdot 2,74 \cdot 10^{-7} \cdot (8,67 \cdot 10^8 - 1,3 \cdot 10^8) - 3,13 \cdot 10^{-6} \cdot q_1 = 933,752 - 3,13 \cdot 10^{-6} \cdot q_1;$$

$$\theta_2 = A_5 \cdot q_{2T} + (1+c) \cdot A_6 \cdot q_3 - A_7 \cdot q_2 = 2,5 \cdot 10^{-7} \cdot 2,34 \cdot 10^8 + (1 + 0,1) \times \\ \times 1,82 \cdot 10^{-6} \cdot 1,3 \cdot 10^8 - 4,66 \cdot 10^{-7} \cdot q_2 = 318,76 - 4,66 \cdot 10^{-7} \cdot q_2.$$

14) Составим код источника плотностью  $q_1$  на передней поверхности резца и, пользуясь алгоритмом (рис. 7.1), рассчитаем значение коэффициента  $S_{11}$ , имея ввиду, что теплообменом задней поверхности резца прилегающей к вспомогательной кромке OL можно пренебречь, в связи

с, чем расчетная ширина источника  $B = 2 \cdot b$ . Код =  $\frac{212}{101.02} 82$ ;

$$A_M = \frac{\ell_1 \cdot q_1}{\lambda_2} = \frac{2,66 \cdot 10^{-3} \cdot q_1}{27,2} = 9,79 \cdot 10^{-5} \cdot q_1;$$

$$A_C = \frac{1}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot 3,14} = 0,159;$$

$$A_p = 3,06, \quad A_o = 1, \quad A_k = 1;$$

$$\eta_1 = \frac{2 \cdot b}{2 \cdot \ell_1} = \frac{2 \cdot 7,07 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2,66 \cdot 10^{-3}} = 2,66.$$

По рис. 7.2 при  $\eta_1 = 2,66$  находим  $A_0 = 0,88$ .

Определяем угол  $\beta = 90 - \alpha - \gamma = 90 - 10 - 12 = 68^\circ$ :

$$A_m = \frac{630 \cdot \text{erf}(0,08 \cdot \eta_1)}{\beta^{0,85}} = \frac{630 \cdot \text{erf}(0,08 \cdot 2,66)}{68^{0,85}} = 4,12;$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{A_M}{q_1} A_c \cdot A_p \cdot A_o \cdot A_k \cdot A_o \cdot A_m = \\ &= \frac{9,79 \cdot 10^{-5} \cdot q_1}{q_1} 0,159 \cdot 3,06 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,88 \cdot 4,12 = 1,73 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

15) Составим код источника плотностью  $q_2$  на задней поверхности резца и, пользуясь алгоритмом (рис. 7.1), рассчитаем значение коэффициента  $C_{22}$ , имея ввиду, что теплообменом задней поверхности резца, прилегающей к вспомогательной кромке OL можно пренебречь, в связи с

чем расчетная ширина источника  $B = 2 \cdot b$ . Код  $= \frac{212}{101,02} 82;$

$$A_M = \frac{\ell_2 \cdot q_2}{\lambda_2} = \frac{0,1 \cdot 10^{-3} \cdot q_2}{27,2} = 3,68 \cdot 10^{-6} \cdot q_2;$$

$$A_C = \frac{1}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot 3,14} = 0,159;$$

$$A_p = 3,06, \quad A_o = 1, \quad A_k = 1;$$

$$\eta_2 = \frac{2 \cdot b}{2 \cdot \ell_2} = \frac{2 \cdot 7,07 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}} = 70,7.$$

По рис. 7.2 при  $\eta_2 = 70,7$  находим  $A_0 = 0,99$ :

$$A_T = \frac{630 \cdot \text{erf}(0,08 \cdot \eta_2)}{\beta^{0,85}} = \frac{630 \cdot \text{erf}(0,08 \cdot 70,7)}{68^{0,85}} = 17,45;$$

$$C_{22} = \frac{A_M}{q_2} A_c \cdot A_p \cdot A_o \cdot A_k \cdot A_o \cdot A_m =$$

$$= \frac{3,68 \cdot 10^{-6} \cdot q_2}{q_2} 0,159 \cdot 3,6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,99 \cdot 17,45 = 3,12 \cdot 10^{-5}.$$

16) С помощью графика (рис. 7.10) определяем коэффициент  $N_2$  и рассчитываем функцию  $C_{21}$ :

$$\text{при } \eta_2 = 70,7 \text{ и } \alpha_1 = \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{2,66 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 10^{-3}} = 26,6, \text{ при } \beta = 68 \text{ определяем}$$

по рис. 7.10, в значение коэффициента  $N_2 = 1,69$ .

$$\text{Рассчитываем функцию } C_{21} = \frac{\ell_2 \cdot N_2}{\lambda_2} = \frac{0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 1,69}{27,2} = 6,21 \cdot 10^{-6}.$$

17) С помощью графика (рис. 7.10) определяем коэффициент  $N_1$  и рассчитываем функцию  $C_{12}$ :

$$C_{12} = \frac{\ell_1 \cdot N_1}{\lambda_2} = \frac{2,66 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{27,2} = 1,98 \cdot 10^{-4}.$$

18) Напишем выражение для температур  $\theta_1$  и  $\theta_2$  со стороны реза

$$\begin{cases} \theta_1 = C_{11} \cdot q_1 + C_{21} \cdot q_2 = 1,73 \cdot 10^{-6} \cdot q_1 + 6,21 \cdot 10^{-6} \cdot q_2 \\ \theta_2 = C_{22} \cdot q_2 + C_{12} \cdot q_1 = 3,12 \cdot 10^{-5} \cdot q_2 + 1,98 \cdot 10^{-4} \cdot q_1 \end{cases}$$

19) Составляем уравнение баланса температур на контактных площадках реза и заготовки и рассчитываем плотности итоговых потоков теплообмена

$$\begin{cases} \theta_1 = 933,752 - 3,13 \cdot 10^{-6} \cdot q_1 \\ \theta_2 = 318,76 - 4,66 \cdot 10^{-7} \cdot q_2 \\ \theta_1 = 1,73 \cdot 10^{-6} \cdot q_1 + 6,21 \cdot 10^{-6} \cdot q_2 \\ \theta_2 = 3,12 \cdot 10^{-5} \cdot q_2 + 1,98 \cdot 10^{-4} \cdot q_1 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$\begin{aligned} q_1 &= 6,3 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2; \\ q_2 &= -2,92 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2; \\ \theta_1 &= 912 \text{ }^\circ\text{С}; \\ \theta_2 &= 340 \text{ }^\circ\text{С}. \end{aligned}$$

20) Определяем температуру резания:

$$\theta = \frac{\theta_1 \cdot \ell_1 + \theta_2 \cdot \ell_2}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{912 \cdot 2,66 \cdot 10^{-3} + 340 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}}{2,66 \cdot 10^{-3} + 0,1 \cdot 10^{-3}} = 891 \text{ }^\circ\text{С}.$$

Полученное значение температуры резания позволяет сделать вывод, что в рассматриваемом процессе необходимо применение смазочно-охлаждающих сред.

### 4.3. Задания на самостоятельную работу

Таблица 11

Исходные данные для выполнения контрольной работы

|    | материал заготовки | материал инструмента | режим резания            |                        |              | силы резания |              | геометрические параметры инструмента |                 |                  |
|----|--------------------|----------------------|--------------------------|------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------------------------------|-----------------|------------------|
|    |                    |                      | $S \cdot 10^3$ ,<br>м/об | $t \cdot 10^3$ ,<br>мм | $v$ ,<br>м/с | $P_z$ ,<br>Н | $P_y$ ,<br>Н | $\gamma$ , град                      | $\alpha$ , град | $\varphi$ , град |
| 1  | 2                  | 3                    | 4                        | 5                      | 6            | 7            | 8            | 9                                    | 10              | 11               |
| 1  | 40XH               | T15K6                | 1                        | 5                      | 4,4          | 1074         | 380          | 15                                   | 7               | 45               |
| 2  | 40XH               | T15K6                | 0,2                      | 15                     | 3,5          | 6494         | 240          | 15                                   | 10              | 45               |
| 3  | 12X18H9T           | BK8                  | 0,23                     | 1,8                    | 4,18         | 948          | 475          | 15                                   | 12              | 45               |
| 4  | 30X                | T15K6                | 1,2                      | 4                      | 1,57         | 5680         | 2260         | 12                                   | 10              | 45               |
| 5  | 40XH               | T15K6                | 1                        | 4                      | 1,5          | 9200         | 4200         | 12                                   | 10              | 45               |
| 6  | 45                 | T14K8                | 0,6                      | 3                      | 1,75         | 1897         | 938          | 12                                   | 10              | 45               |
| 7  | 20XH3A             | BK8                  | 0,6                      | 3                      | 1,125        | 3680         | 1420         | 12                                   | 10              | 45               |
| 8  | 30XГС              | T15K6                | 1                        | 2                      | 1,4          | 8255         | 3680         | 15                                   | 8               | 45               |
| 9  | СЧ20               | BK8                  | 0,6                      | 4                      | 1,44         | 8654         | 3421         | 12                                   | 10              | 60               |
| 10 | СЧ20               | BK6                  | 1                        | 1                      | 1,7          | 848          | 390          | 15                                   | 10              | 45               |
| 11 | 45                 | T15K6                | 0,4                      | 4                      | 2,92         | 1500         | 750          | 10                                   | 12              | 60               |
| 12 | 40                 | BK8                  | 0,7                      | 3,5                    | 2,1          | 3542         | 1640         | 8                                    | 10              | 60               |
| 13 | 30X                | BK8                  | 0,2                      | 2                      | 1,25         | 488          | 240          | 8                                    | 10              | 45               |
| 14 | 20                 | T15K10               | 0,8                      | 4                      | 1,3          | 4520         | 3620         | 12                                   | 10              | 45               |
| 15 | СЧ20               | BK8                  | 0,2                      | 1                      | 0,92         | 247,6        | 265,8        | 12                                   | 6               | 75               |
| 16 | 45XH               | T15K6                | 0,2                      | 3                      | 2,65         | 1043         | 702          | 25                                   | 12              | 60               |
| 17 | СЧ20               | BK8                  | 0,2                      | 1                      | 2,62         | 400          | 170          | 8                                    | 8               | 45               |
| 18 | СЧ20               | BK6                  | 0,4                      | 3                      | 1,3          | 1307         | 568          | 12                                   | 10              | 45               |
| 19 | 40XH               | T15K6                | 0,8                      | 1,25                   | 1,6          | 1726         | 1321         | 14                                   | 12              | 60               |
| 20 | 45                 | T14K8                | 0,8                      | 3                      | 1,5          | 3800         | 2985         | 5                                    | 18              | 60               |
| 21 | 45                 | T15K6                | 0,6                      | 3                      | 1,1          | 6108         | 2212         | 12                                   | 10              | 45               |
| 22 | 40XH               | T15K6                | 0,9                      | 3,5                    | 1,9          | 1416         | 940          | 12                                   | 10              | 45               |
| 23 | 40                 | T15K6                | 0,2                      | 3                      | 3,2          | 1045         | 520          | 15                                   | 10              | 60               |
| 24 | 45                 | T15K6                | 0,2                      | 1,5                    | 2,74         | 474          | 300          | 15                                   | 10              | 60               |
| 25 | 40                 | T15K6                | 1                        | 2,5                    | 1,17         | 3110         | 1530         | 16                                   | 15              | 60               |
| 26 | 45                 | T15K8                | 0,2                      | 1,5                    | 4,5          | 410          | 240          | 25                                   | 12              | 70               |
| 27 | СЧ20               | BK8                  | 0,7                      | 2,5                    | 1,2          | 1860         | 620          | 8                                    | 8               | 45               |
| 28 | СЧ20               | T15K8                | 1,4                      | 4                      | 0,98         | 7500         | 3000         | 8                                    | 10              | 30               |
| 29 | СЧ20               | BK8                  | 0,25                     | 1,5                    | 1,98         | 516          | 291          | 8                                    | 10              | 45               |
| 30 | 40XH               | T15K6                | 0,9                      | 4                      | 1,5          | 9500         | 4200         | 17                                   | 10              | 45               |
| 31 | 30XГС              | BK8                  | 0,5                      | 3,5                    | 1,35         | 6520         | 2120         | 16                                   | 12              | 60               |
| 32 | 45                 | T14K8                | 0,35                     | 1,25                   | 1,75         | 3250         | 2100         | 15                                   | 12              | 45               |
| 33 | СЧ20               | T15K6                | 0,4                      | 3                      | 3,2          | 2630         | 948          | 12                                   | 10              | 45               |
| 34 | 40XH               | T15K6                | 0,2                      | 2,5                    | 1,32         | 5760         | 2140         | 8                                    | 6               | 60               |
| 35 | 30X                | T14K8                | 0,4                      | 1,5                    | 1,8          | 6300         | 4120         | 6                                    | 10              | 45               |
| 36 | 20XH3A             | BK8                  | 0,2                      | 1,8                    | 0,95         | 3980         | 1817         | 10                                   | 8               | 45               |
| 37 | 30XГС              | BK8                  | 0,3                      | 3,2                    | 2,6          | 4320         | 1830         | 13                                   | 6               | 45               |
| 38 | 12X18H9T           | T15K6                | 0,4                      | 4                      | 3,5          | 1120         | 530          | 10                                   | 8               | 45               |
| 39 | СЧ15               | BK8                  | 0,5                      | 3                      | 1            | 2560         | 150          | 10                                   | 15              | 45               |
| 40 | 30X                | T14K8                | 0,3                      | 2,5                    | 1,8          | 4560         | 250          | 8                                    | 10              | 45               |

Таблица 12

Коэффициенты теплопроводности  $\lambda$  и температуропроводности  $a$ , объемная теплоемкость  $ср$  материалов заготовки и инструмента (средние в диапазоне температур, возникающих при механической обработке).

| Материал                  | Марка    | $\lambda$ , Вт/(м.К) | $a \cdot 10^4$ , м <sup>2</sup> /с | $ср \cdot 10^{-6}$<br>Дж/(м <sup>3</sup> К) |
|---------------------------|----------|----------------------|------------------------------------|---|
| Сталь углеродистая        | 40       | 38,5                 | 0,076                              | 5,06  |
|                           | 45       | 40,2                 | 0,080                              | 5,02  |
| Сталь низколегированная   | 30С      | 35,2                 | 0,072                              | 4,89  |
|                           | 40Х      | 33,9                 | 0,067                              | 5,06  |
|                           | ШХ15     | 33,4                 | 0,065                              | 5,15  |
|                           | 20ХН3А   | 33,5                 | 0,066                              | 5,07  |
|                           | 30ХГС    | 36,0                 | 0,070                              | 5,14  |
| Сталь аустенитного класса | 20Х23Н18 | 21,5                 | 0,050                              | 4,30  |
|                           | 110Г13Л  | 22,2                 | 0,042                              | 5,28  |
|                           | 12Х18Н9Т | 22,6                 | 0,050                              | 4,52  |
|                           | 14Х17Н2  | 25,0                 | 0,060                              | 4,17  |
| Сталь инструментальная    | У12      | 34,7                 | 0,071                              | 4,89  |
|                           | ХВГ      | 27,2                 | 0,054                              | 5,02  |
|                           | Р12      | 27,2                 | 0,057                              | 4,77  |
| Жаропрочный сплав         | ВТ4      | 12,9                 | 0,043                              | 3,01  |
|                           | ХН77ТЮ   | 19,7                 | 0,041                              | 4,80  |
|                           | Р        |                      |                                    |   |
| Чугун                     | СЧ30     | 39,8                 | 0,113                              | 3,52  |
| Твердый сплав             | ВК8      | 54,4                 | 0,246                              | 2,21  |
|                           | Т14К8    | 33,9                 | 0,110                              | 3,08  |
|                           | Т15К6    | 27,2                 | 0,100                              | 2,72  |
| Алмаз                     | АС       | 520                  | 0,830                              | 6,26  |
| Кубический нитрит бора    | (эльбор) | 41,9                 | 0,180                              | 2,30  |

## 5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем состоит идея инженерной методики расчета температур на контактных площадках твердых тел при точении?
2. Сколько ветвей содержит алгоритм расчета температур на контактных площадках твердых тел?
3. Какой размер выбирается в качестве характерного при расчете коэффициента  $A_M$ ?
4. Как определяют коэффициент  $A_P$ ?
5. Что учитывает коэффициент  $A_D$ , и с помощью какого критерия его выбирают?
6. Какой безразмерный комплекс определяет значение коэффициента  $A_0$  для прямоугольных источников теплоты?
7. В чем состоит особенность методики расчета температур на контактных площадках стержней?

8. Каким образом в рассматриваемой методике учитывается взаимное влияние источников?
9. Какие источники и стоки теплоты можно выделить в зоне резания при точении?
10. Опишите местоположение и форму источников и стоков теплоты в структурной схеме теплообмена при точении.

## 6. ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бобров В.Ф. Основы теории резания металлов. М.:Машиностроение, 1975. – 343с.
2. Лариков Н.Н. Теплотехника. М.:Стройиздат, 1985. – 432с.
3. Резников А.Н. Теплофизика процессов механической обработки материалов. М.:Машиностроение, 1981. – 279с.
4. Резников А. Н., Резников Л. А. Тепловые процессы в технологических системах. – М.: Машиностроение, 1990. – 288с.
5. Справочник технолога-машиностроителя. В 2-х т. Т 1 / Под ред. Косиловой А. Г. и Мещерякова Р. К. – М.: Машиностроение, 1986.
6. Теплотехника: /Под общей редакцией А.П. Баскатова. М.:Энергоиздат, 1982. – 264с.
7. Шорин С.Н. Теплопередача. М.:Высшая школа, 1964. – 490с.
8. Алферов В.И., Соколов Ю.И. Теплообмен деталей станков с воздухом цеха //Станки и инструмент, 1968, №9, с. 10-11.

Наталья Георгиевна Неумоина  
Александр Владимирович Белов

ТЕПЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ  
СИСТЕМЕ РЕЗАНИЯ

*Учебное пособие*

Под редакцией авторов  
Темплан 2006 г., поз. № 11.  
Подписано в печать 16. 11. 2006 г. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага листовая. Печать ризографическая.  
Усл. печ. л. 5,25. Усл. авт. л. 5,06.  
Тираж 100 экз. Заказ №

Волгоградский государственный технический университет  
400131 Волгоград, просп. им. В. И. Ленина, 28.  
РПК «Политехник»  
Волгоградского государственного технического университета  
400131 Волгоград, ул. Советская, 35.